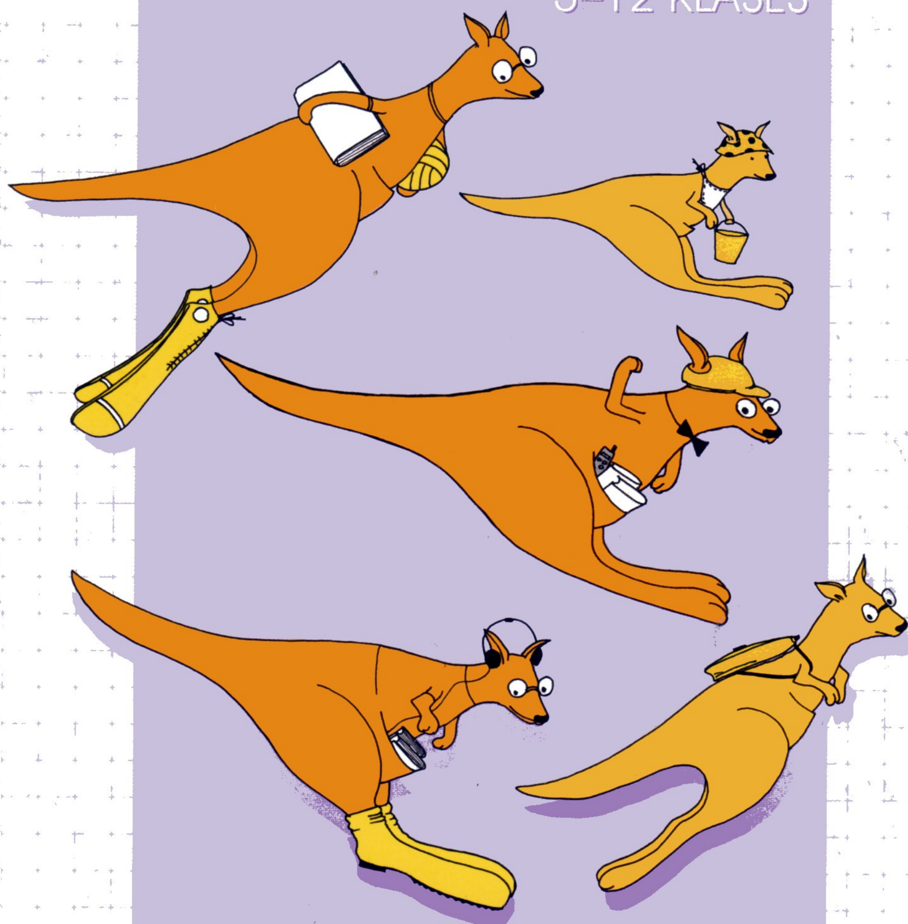
KENGŪRA



TARPTAUTINIO MATEMATIKOS
KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZACINIS KOMITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS INSTITUTAS

KENGŪRA

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Sudarė JUOZAS MAČYS

TEV
VILNIUS 1999

UDK 51(~~079~~)
Ke108

Lietuvos Respublikos švietimo ir mokslo ministerijos leista naudoti
1999 12 17, grifo Nr. 398

Darbo vadovas: *Elmundas Žalys*
Programinė įranga: *Rolandas Jakštys*
Kompiuterinė grafika: *Inga Paukštienė, Edita Tatarinavičiūtė*
Gamybos vadovas: *Algimantas Paškevičius*
Teksto kompiuterinis rinkimas ir maketavimas: *Aldona Žalienė*
Recenzentai: *Marytė Stričkienė, Vladas Vitkus*

Leidyklos TEV *Internet'o* svetainė: www.tev.lt

ISBN 9986-546-76-1

TURINYS

PRATARMĖ

1991 metais Prancūzijos matematikai organizavo konkursą, kurio simboliu tapo miela australiška kengūra. Kengūra čia atsirado neatsitiktinai, kadangi pati „Kengūros“ konkurso idėja kilo Australijoje, ir konkursas ten yra neįtikėtinai populiarus – jame dalyvauja apie 90% (!) įvairių klasių moksleivių. „Kengūra“ labai gerai tiko ir Europos sąlygomis, tad daugelis šalių ėmėsi organizuoti panašų renginį.

Konkursas atspindi naujuosius gyvenimo, matematikos ir kompiuterijos pokyčius. Konkurso trukmė palyginti su olimpiadų trukme neįprastai maža – vos 75 minutės. Visos užduotys testinės – užtenka nurodyti vienintelį teisingą iš penkių pateiktų atsakymų. Korteles apdoroja ir rezultatus nustato tik kompiuteris, todėl pretenzijas reikšti nėra kam. Konkursas remiasi dalyvių ir organizatorių entuziazmu, o kortelių ir užduočių parengimo bei rezultatų apdorojimo išlaidos padengiamos iš starto mokesčių (užsienyje apie 2 JAV doleriai), kuriuos moka kiekvienas dalyvis. Dalis lėšų, surinktų iš starto mokesčių, taip pat skiriama nugalėtojų prizams įsigyti, pasirengimo stovykloms organizuoti ir pan.

Lietuvoje „Kengūros“ konkursas atskirose mokyklose organizuojamas jau nuo 1995 metų. Iki 1998 metų užduočių sąlygos būdavo parsisiunčiamos rusų ir lenkų kalbomis, ir tik 1999 metais jos buvo parengtos lietuviškai. Gavus iš Torunės universiteto užduotis lenkų kalba, teko per trumpą laiką išversti ir perspręsti apie 140 uždavinių, kiekvienam dalyviui parengti užduočių lapelį. Konkursas sukėlė didžiulį susidomėjimą, tad tikimasi, kad 2000 metų kovo 16 d. (data preliminari) konkurse dalyvaus daugiau kaip 10 000 moksleivių.

„Kengūros“ konkursas ir jo užduotys sudaro galimybę praleisti daug malonių akimirkų su matematika. Per 75 minutes moksleiviai sprendžia 30 įvairaus sunkumo uždavinių (M grupės mažieji – 24 uždavinius). Konkursas organizuojamas penkioms amžiaus grupėms:

M (Mažylis)	III–IV klasės
B (Bičiulis)	V–VI klasės
K (Kadetas)	VII–VIII klasės
J (Junioras)	IX–X klasės
S (Senjoras)	XI–XII klasės

Ši knygelė parašyta siekiant padėti moksleiviams visapusiškai pasiruošti konkursui. Visų pirma, būsimasis dalyvis susipažins su uždavinių stiliumi ir jų sprendimo technika. Antra, jis bus pasirengęs teisingai užpildyti dalyvio kortelę. Pagaliau, konkurso užduotys, jų tekstai nepalieka nei vieno abejingo – tiek moksleivių, tiek ir jų tėvų bei mokytojų.

Būsimasis dalyvis turi savo mokykloje iki sausio mėnesio galo pareikšti norą dalyvauti konkurse ir sumokėti starto mokestį. Atvykęs į konkursą, kiekvienas užsiregistravęs mokinys gauna dalyvio kortelę ir ją užpildo. Joje reikia įrašyti mokyklos kodą, savo pavardę ir vardą, taip pat klasę. Paaiškinsime, kaip tai daroma, naudodamiesi kortele, panašia į duodamą konkursų metu (žr. pavyzdį 6 psl.).

- Kortelė pildoma tik juoda arba tamsiai mėlyna spalva, geriausiai vidutinio kietumo pieštuku. Atlikęs užduotį, konkurso dalyvis grąžina komisijai tik kortelę (užduočių lapelis ir sprendimai lieka jam pačiam).

DALYVIO KORTELĖ

K	T	U	G		N	A	R	K	E	V	I	C	I	U	T	E		R	A	S	A
M-klos kodas					Pavardė													Vardas			
A	A	A	A		A	■	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	■	A	■
B	B	B	B		B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C		C	C	C	C	C	C	C	■	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D		D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E		E	E	E	E	■	E	E	E	E	E	E	■	E	E	E	E	E
F	F	F	F		F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F
G	G	G	■		G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G
H	H	H	H		H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H
I	I	I	I		I	I	I	I	I	I	■	I	■	I	I	I	I	I	I	I	I
J	J	J	J		J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J
■	K	K	K		K	K	K	■	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K
L	L	L	L		L	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L
M	M	M	M		M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M
N	N	N	N		■	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N
O	O	O	O		O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
P	P	P	P		P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
R	R	R	R		R	R	■	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	■	R	R	R
S	S	S	S		S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	■	S
T	■	T	T		T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	■	T	T	T	T	T	T
U	U	■	U		U	U	U	U	U	U	U	U	U	■	U	U	U	U	U	U	U
V	V	V	V		V	V	V	V	V	■	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
Y	Y	Y	Y		Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y
Z	Z	Z	Z		Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z

Klasė: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 ■

ATSAKYMAI

1 A B ■ D E	11 A ■ C D E	21 A ■ C D E
2 ■ B C D E	12 A B C ■ E	22 A B C D ■
3 A B C D ■	13 ■ B C D E	23 A B ■ D E
4 ■ B C D E	14 A B ■ D E	24 A ■ C D E
5 A B C ■ E	15 A B ■ D E	25 A B ■ D E
6 A B C ■ E	16 A B C D ■	26 A B C ■ E
7 A ■ C D E	17 A B C ■ E	27 A ■ C D E
8 A B C D ■	18 A B ■ D E	28 A B C ■ E
9 A B C ■ E	19 A ■ C D E	29 A B ■ D E
10 A B C ■ E	20 A B ■ D E	30 A B C D ■

- Priekinėje kortelės pusėje įrašomas mokyklos KODAS (spausdintinėmis didžiosiomis raidėmis, po vieną raidę kiekviename langelyje; kodą nurodo komisija).
- Po kiekviena raide reikia užtušuoti stačiakampį su ta raide. Po kiekviena raide gali būti užtušuotas TIK VIENAS stačiakampis.
- Panašiai įrašome pavardę ir vardą (jei vardas netelpa, rašome tiek raidžių, kiek telpa) ir užtušuojame atitinkamus stačiakampius (jei korta parengta lotyniškomis raidėmis, imame lietuvišką raidę be nosinių ar kitų ženkliukų; taigi vietoje Ą imame raidę A, vietoje Č – raidę C, vietoje Ę ir Ė – raidę E, vietoje Į – raidę I, vietoje Š – raidę S, vietoje Ų ir Ū – raidę U, vietoje Ž – raidę Z). Tarp pavardės ir vardo paliekamas vienas tuščias langelis.
- Užtušuojame stačiakampį, žymintį KLASĘ (gimnazijų IV klasė prilyginama 12 klasei ir t.t.).
- Atsakymų lentelėje užtušuojame stačiakampį su raide, reiškiančia teisingą atsakymą (pavyzdyje užtušuoti teisingi 1999 m. konkurso S (senjorų) grupės užduočių teisingi atsakymai).

Teisingas kortelės užpildymas yra testo dalis, ir tik kompiuteris spręs, ar jūsų korta užpildyta gerai.

Knygelėje pateiktos 1999 m. „Kengūros" konkurso užduotys ir jų sprendimai. Kad mokinys galėtų pasitreniruoti, knygelės gale yra duota visų užduočių teisingų atsakymų lentelė. Mokinys galėtų daryti taip: pasiimti iš pradžių, pavyzdžiui, žemesnės klasės testą ir atlikti jį su laikrodžiu per duodamas 75 minutes. Po to jis gali pasitikrinti atsakymus ir spręsti apie savo darbo kokybę. Lygiai tą patį jis gali atlikti su savo ar vyresnės klasės testu – dauguma vyresniųjų klasių užduočių taip pat prieinamos jaunesniems.

Konkurse negalima naudotis skaičiuokliais. Labai įdomi konkurso savybė, kad tai testinis konkursas. Tai reiškia, kad jeigu jūs beveik neabejojate atsakymu, tai geriausia pasirašyti sau tą atsakymą, pasižymėti jį, sakykime, klaustuku, ir grįžti prie jo tik tada, jei liktų laiko (beje, jo greičiausiai neliks). Todėl konkursui ir reikia ruoštis specialiai, ne kaip egzaminui ar olimpiadai: čia įrodinėti nieko nereikia. Dėl šios priežasties konkursas yra labai demokratiškas – sakysime, labai geras, bet lėtas olimpiadininkas gali parodyti blogesnį rezultatą negu pritingintis, bet greitos orientacijos mokinys.

Knygelėje pateikti visų uždavinių detalūs sprendimai. Todėl pasitreniravus galima juos tiesiog skaityti. Kad skaityti būtų patogiau, sąlyga (su paveikslėliais, kai jų yra) dar kartą pateikiama prieš sprendimą.

Sprendimų dalyje jau po sąlygos nurodyta, kuris atsakymas teisingas (atitinkama raidė apvesta skrituliuku, pvz., Ⓑ).

? Po to ženklu **?** pažymėtas spėjimas. Žinoma, kartais tas spėjimas yra beveik sprendimas, tik spėjime visą laiką remiamasi tuo, kad teisingas yra vienintelis iš penkių siūlomų pasirinkti atsakymų. Todėl atspėjus atsakymą ir pasitikrinus, kad jis tinka, nieko daugiau daryti nebereikia. Kai spėti atsakymą beprasmiška, spėjimas iš viso neduodamas ir iš karto pereinama prie sprendimo. Dar kartą pabrėžiame – rengiantis „Kengūros" konkursui visiškai pakanka pabandyti savarankiškai paspręsti uždavinius ir paskaityti klaustuko ženklu pažymėtus „spėjimus".

! Ženklu ! žymimas griežtas sprendimas. Suprantama, jį perskaityti labai naudinga: čia įrodoma, kad kiti atsakymai netinka, mokoma logiškai samprotauti. Tai visada pravers laikant egzaminus ar dalyvaujant olimpiadose. Beje, būtent „Kengūros“ konkursui sugalvojama daugybė naujų gražių uždavinių (juos rengiant dalyvauja ir geriausi Europos matematikai). Po to tuos uždavinius galima atpažinti visur – olimpiadose, valstybinių egzaminų užduotyse ir vadovėliuose.

!! Ženklu !! žymimas kitas sprendimas, dažniausiai trumpesnis, bet kartais reikalaujantis daugiau žinių (kartais pateikiamas net trečias sprendimas, pažymėtas ženklu !!!).

Kaip daug gali skirtis uždavinio atsakymo spėjimas (pakankamas dalyvaujant konkurse) ir to uždavinio sprendimas, labai gerai matyti iš uždavinio K20 (žr. jo sprendimą ir pastabą). Atspėti uždavinio atsakymą čia ypač paprasta, o griežtai išspręsti uždavinį tikrai labai sunku.
Prancūzijoje ir kitose šalyse „Kengūros“ konkursas organizuojamas ne tik moksleiviams: yra studentų, suaugusių mėgėjų ir net matematikų profesionalų grupės. Tai rodo, kokio susidomėjimo susilaukė „Kengūra“ įvairiuose visuomenės sluoksniuose. Nuo 2000 metų konkursuose Lietuvoje galės dalyvauti kiekviena mokykla, kiekvienas pageidaujantis mokinys. Čia jiems turėtų padėti prie savivaldybių Švietimo skyrių veikiantys matematikos metodiniai būreliai ir visuomeniniais pagrindais steigiami „Kengūros“ konkurso komitetai. Atsižvelgdami į didžiulį susidomėjimą konkursu ir siekdami geriau jam pasirengti, ankstesnių metų konkurso organizatoriai 1999 metų lapkričio 23 dieną įsteigė Lietuvos „Kengūros“ konkurso organizacinį komitetą:

pirmininkas – dr. Juozas Mačys, Matematikos ir informatikos instituto vyr. mokslinis bendradarbis;
pavaduotoja – mokytoja ekspertė Marytė Stričkienė, Lietuvos švietimo ir mokslo ministerijos vyr. specialistė;
pavaduotojas – prof. habil. dr. Edvardas Špilevskis, Matematikos ir informatikos instituto vyr. mokslinis bendradarbis;
narys – dr. Algirdas Zabulionis, LŠMM Egzaminų centro direktorius;
narys – dr. Romualdas Kašuba, Vilniaus universiteto dėstytojas;
narė – mokytoja ekspertė Liucija Nonievič, Vilniaus A. Mickevičiaus gimnazijos mokytoja;
narė – mokytoja metodininkė Bronė Zakienė, Vilniaus M. Biržiškos gimnazijos direktoriaus pavaduotoja;
narė – mokytoja metodininkė Stasė Čeburnienė, Vilniaus jėzuitų gimnazijos direktoriaus pavaduotoja.

Orgkomiteto sekretorė – Pajauta Puzinaitė (tel.: 729218, el. paštas: conf@ktl.mii.lt, adresas: Matematikos ir informatikos institutas, Akademijos g. 4, LT-2600 Vilnius).

Organizacinis komitetas planuoja 2000 metų „Kengūros“ konkursą rengti kartu su LŠMM Egzaminų centru, Matematikos ir informatikos institutu ir leidykla TEV, kurie prisiima finansinį ir techninį šio didžiulio projekto vykdymą.

Sudarytojas

SĄLYGOS

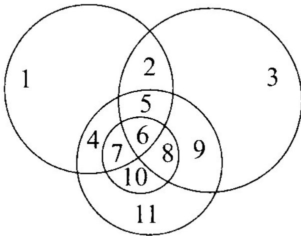
MAŽYLIS (III ir IV klasės)



KLAUSIMAI PO 3 TAŠKUS

M1. Beatričė turi dvi lėles, tris obuolius, vieną šokoladuką, du apelsinus, penkis persikus ir vieną dviratį. Kiek vaisių turi Beatričė?
A 3 **B** 5 **C** 10 **D** 18 **E** 21

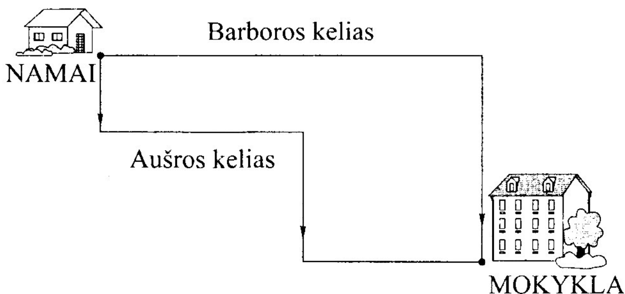
M2. Kuriuo numeriu pažymėta bendra visų keturių skritulių dalis?
A 5 **B** 9 **C** 7 **D** 4 **E** 6



M3. Keliose vietose reikia perlaužti medinę lazdelę, kad gautume 5 dalis?
A 3 **B** 4 **C** 5 **D** 6 **E** Tai priklauso nuo lazdelės ilgio

M4. Kaziukui dabar 10 metų, o Alei 3 metai. Po kelerių metų Kaziukas bus dukart vyresnis už Alę?
A 5 **B** 10 **C** 4 **D** 1 **E** 3

M5. Aušra ir jos sesuo Barbora lanko tą pačią mokyklą, bet į ją eina skirtingais keliais. Kurios kelias trumpesnis?



A Aušros kelias **B** Barboros kelias **C** Tai priklauso nuo atstumo iki mokyklos
D Abiejų kelių ilgis vienodas **E** Nustatyti neįmanoma

M6. Mūsų klasėje yra 30 mokinių. Berniukų joje keturis kartus daugiau negu mergaičių. Kiek mergaičių mokosi mūsų klasėje?

A 24 **B** 16 **C** 12 **D** 8 **E** 6

M7. Kiek sveria apelsinas?

A 200 g **B** 205 g **C** 155 g **D** 5 g
E Nustatyti neįmanoma



M8. „Mano uodega, – sako katinas, – lygi 12 cm ir dar pusė mano uodegos ilgio". Koks katino uodegos ilgis?

A 18 cm **B** 24 cm **C** 12 cm **D** 9 cm **E** 6 cm

KLAUSIMAI PO 4 TAŠKUS

M9. Mano mamos gimtadienis bus sekmadienį, o tėtės – 55 dienomis vėliau. Kurią savaitės dieną bus tėtės gimtadienis?

A Sekmadienį **B** Pirmadienį **C** Antradienį **D** Ketvirtadienį
E Šeštadienį

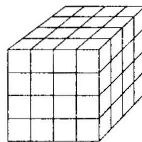
M10. Dvi krepšinio komandos žaidžia rungtynių seriją. Laimi ta komanda, kuri pirma iškovoja keturias pergales. Lygiųjų nėra. Koks gali būti didžiausias skaičius rungtynių, po kurių garantuotai paaiškės nugalėtojas?

A 8 **B** 7 **C** 6 **D** 5 **E** 4

M11. Jonukas turėjo prie tam tikro skaičiaus pridėti 27, bet vietoj to atėmė 27. Koks yra teisingo rezultato ir Jonuko rezultato skirtumas?

A 27 **B** 0 **C** 54 **D** 100 **E** 3

M12. Auksakalys nusprendė auksinį kubą, kurio kraštinė lygi 4 cm, padalyti į kubelius, kurių kraštinė lygi 1 cm. Kiek jis gaus mažųjų kubelių?



A 64 **B** 48 **C** 32 **D** 16 **E** 12

M13. Pilnas pieno bidonas sveria 25 kg, o pripiltas iki pusės – 13 kg. Kiek sveria tuščias bidonas?

A 2 kg **B** 500 g **C** 1500 g **D** 1 kg **E** 2500 g

M14. Močiutė šaldytuve laiko stiklainį, kuriame yra 650 g uogienės. Anūkėlis Tomukas kiekvieną dieną iš jo suvalgo po 5 šaukštelius uogienės. Šaukštelyje telpa 6 g uogienės. Kiek uogienės liks stiklainyje po 20 dienų?

A 50 g **B** 530 g **C** 550 g **D** 1250 g **E** Stiklainis bus tuščias

M15. Kiekvienas iš vienuolikos kengūros vaikų turi vienuolika vaikų, iš kurių kiekvienas vėl turi vienuolika vaikų. Kiek proanūkių turi kengūra?

A 111 **B** 121 **C** 11211 **D** 1331 **E** 12321

M16. Koks yra mažiausias galimas vaikų skaičius Kondratų šeimoje, jeigu kiekvienas vaikas turi mažiausiai vieną brolį ir mažiausiai vieną seserį?
A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** 5

KLAUSIMAI PO 5 TAŠKUS

M17. Petriukas atverčia knygą ir mato, kad kairiojo ir dešiniojo puslapių numerių suma lygi 21. Kam yra lygi tų dviejų numerių sandauga?
A 121 **B** 100 **C** 420 **D** 110 **E** 462

M18. Tėvas Virgilijus globoja 143 vaikus. Kasdien pusryčiams kiekvienas vaikas gauna pusę litro pieno. Vienos karvės pieno užtenka 40 vaikų. Kiek mažiausiai karvių turi laikyti Tėvas Virgilijus?
A 2 **B** 3 **C** 4 **D** 5 **E** 6

M19. Iš kvadratinių 10 cm × 10 cm medžiagos skiaučių kengūrėlė nori susiūti stačiakampį 1,5 m ilgio ir 1 m pločio užtiesalą. Visur, kur sueina keturi kvadratėliai, ji nori prisiūti puošnią sagutę. Kiek sagučių jai prireiks?
A 150 **B** 104 **C** 126 **D** 140 **E** 135

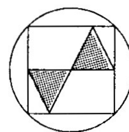
M20. Pinokio medinės nosies ilgis yra 3 cm. Kiekvieną kartą, kai Pinokis sumeluoja, jo nosies ilgis padvigubėja. Koks bus jo nosies ilgis šešis kartus sumelavus?
A 192 cm **B** 67 cm **C** 96 cm **D** 18 cm **E** 384 cm

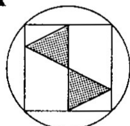
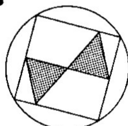
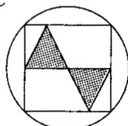
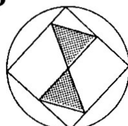
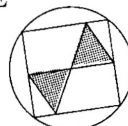
M21. Kieme yra po tiek pat kiaulių, ančių ir vištų. Visos jos turi 144 kojas. Kiek ančių yra kieme?
A 18 **B** 21 **C** 35 **D** 42 **E** 43

M22. Iš skaičių 51, 52, 53, 54, 55 pasirinktas vienas, ir tarp jo skaitmenų įrašytas skaitmuo 0. Koks naujojo ir iš pradžių pasirinkto skaičiaus skirtumas?
A 500 **B** 50 **C** 550 **D** 450
E Skirtumas priklauso nuo to, kurį skaičių pasirinkome

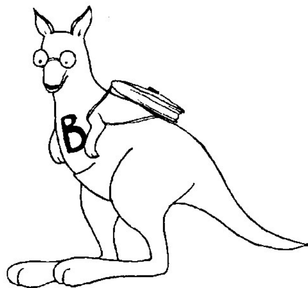
M23. Jeigu močiutė kiekvienam iš savo anūkų mėgintų duoti po 10 saldainių, tai vienam iš jų neliktų nieko. Bet jeigu močiutė duotų po 8 saldainius, tai jai dar liktų 6 saldainiai. Kiek anūkų turi močiutė?
A 4 **B** 6 **C** 8 **D** 10 **E** 12

M24. Šalia esančiame piešinyje pavaizduotas diskas, kuris sukasi pagal laikrodžio rodyklę ir per valandą padaro vieną pilną apsisukimą. 12^{00} valandą diskas užima piešinyje pavaizduotą padėtį. Kokia bus disko padėtis 14^{15} valandą?



A

B

C

D

E


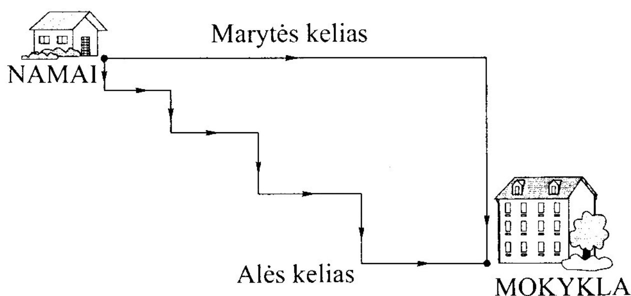
BIČIULIS (V ir VI klasės)



KLAUSIMAI PO 3 TAŠKUS

B1. $1999 - 999 + 99 - 9 =$
A 1900 **B** 1090 **C** 1000 **D** 1990 **E** 1009

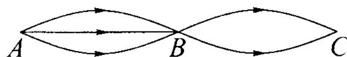
B2. Alė ir jos sesuo Marytė iš namų į mokyklą eina skirtingais keliais. Kuris kelias ilgesnis?



A Alės kelias **B** Marytės kelias **C** Tai priklauso nuo atstumo iki mokyklos
D Abiejų kelių ilgis vienodas **E** Nustatyti neįmanoma

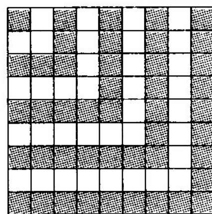
B3. Ketvirtoji dalis pusės padvigubinto skaičiaus 32 lygi:
A 4 **B** 8 **C** 16 **D** 32 **E** 64

B4. Kiek kelių veda iš vietovės A į vietovę C?
A 5 **B** 3 **C** 5 **D** 6 **E** 9

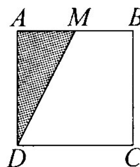


B5. Kiek kartų minutinė laikrodžio rodyklė juda greičiau už valandinę rodyklę?
A 6 **B** 12 **C** 9 **D** 10 **E** 15

B6. Šalia esančiame piešinyje užtušuotas tam tikras skaičius mažųjų kvadratėlių, sudarančių didįjį kvadratą 9×9. Kam lygus užtušuotų kvadratėlių skaičiaus ir neužtušuotų kvadratėlių skaičiaus skirtumas?
A 0 **B** 1 **C** 5 **D** 9 **E** 10



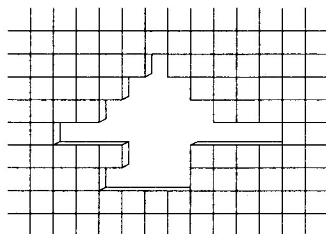
B7. Keturkampis $ABCD$ yra kvadratas, o taškas M yra kraštinės AB vidurys. Užtušuotos dalies plotas lygus 9 cm^2. Kvadrato $ABCD$ plotas lygus:
A 18 cm^2 **B** 27 cm^2 **C** 32 cm^2 **D** 36 cm^2 **E** 45 cm^2



B8. Kino seansas prasidėjo 13^{47}, o baigėsi 16^{18}. Kiek laiko truko seansas?
A 185 min **B** 151 min **C** 91 min **D** 149 min **E** 209 min

B9. Vienas iš gimtadienio vakarėlio dalyvių sužinojo, kad jokie du asmenys iš esančių tame vakarėlyje nėra gimę tą patį mėnesį. Kiek daugiausiai asmenų galėjo dalyvauti vakarėlyje?
A 11 **B** 12 **C** 13 **D** 24 **E** 344

B10. Kiek plytų išimta iš sienos?
A 26 **B** 32 **C** 36 **D** 40 **E** 42



KLAUSIMAI PO 4 TAŠKUS

B11. Jonukas atverčia knygą ir mato, kad kairiojo puslapio ir dešiniojo puslapio numerių suma lygi 25. Kam lygi tų dviejų skaičių sandauga?
A 169 **B** 144 **C** 150 **D** 156 **E** 1998

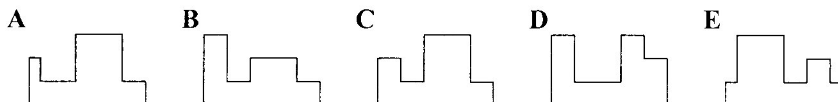
B12. Vienas kengūros šuolis lygus 5 m. Kiek šuolių jai prireiks įveikti nuotolį 5000 m + 5000 dm + 5000 cm + 5000 mm?
A 1000 **B** 1100 **C** 1110 **D** 1111 **E** 5555

B13. 1 m ilgio lazdos ilgis nuotraukoje yra 2 cm, o tvoros aukštis toje pačioje nuotraukoje lygus 4,5 cm. Tikrasis tvoros aukštis centimetrais yra lygus:
A 450 **B** 225 **C** 45 **D** 22,5 **E** 4,5

B14. Kam lygi suma dviejų skaitmenų, kurie pakeisti žvaigždutėmis šalia pavaizduotoje daugyboje?
A 6 **B** 8 **C** 10 **D** 12 **E** 14

$$\begin{array}{r} 6*3 \\ \times\quad 5 \\ \hline 346* \end{array}$$

B15. Kuri iš apačioje esančių figūrų sudarys stačiakampį su figūra, pavaizduota šalia?



B16. Šuo yra 9 kartus sunkesnis už katiną, pelė yra 20 kartų lengvesnė už katiną, o ropė yra 6 kartus sunkesnė už pelę. Kiek kartų šuo sunkesnis už ropę?
A 30 **B** 27 **C** 1080 **D** 15 **E** Šuo lengvesnis už ropę

B17. Iš kvadratinių 10 cm × 10 cm medžiagos skiaučių kengūrėlė nori susiūti stačiakampį 1,5 m ilgio ir 1 m pločio užtiesalą. Visur, kur sueina keturi kvadratėliai, ji nori prisiūti puošnią sagutę. Kiek sagučių jai prireiks?
A 150 **B** 104 **C** 126 **D** 140 **E** 135

B18. Pirmame inde buvo 26 litrai vandens, o antrame – 7 litrai vandens. Į kiekvieną indą buvo dar įpilta po tiek pat vandens, ir tada antrame inde vandens pasidarė 3 kartus mažiau negu pirmame. Kiek litrų vandens buvo dar įpilta į kiekvieną iš indų?
A 2,5 **B** 5 **C** 7,5 **D** 10 **E** 15

B19. Magiškojo kvadrato kiekvienoje eilutėje, kiekviename stulpelyje ir kiekvienoje įstrižainėje visų elementų suma yra ta pati. Šalia pavaizduotas magiškasis kvadratas, iš kurio du skaičiai pašalinti, o kiti trys uždengti kortelėmis su raidėmis P, Q ir R. Kam yra lygi kortelėmis P, Q ir R uždengtų skaičių suma?
A 30 **B** 41 **C** 14 **D** 25 **E** Nustatyti neįmanoma

16	3	P
R	10	
Q		4

B20. Jonas ir Adomas dėlioja kvadratus iš vienodų kvadratėlių. Adomas deda raudoną kvadratėlį. Tada Jonas aplink jį deda 8 žalius kvadratėlius ir vėl gauna kvadratą. Dabar Adomas deda 16 geltonų kvadratėlių aplink jau padėtus, susidaro trečias kvadratas, ir t.t. Kiek kvadratėlių teks Adomui pridėti sudarant penktą kvadratą?
A 32 **B** 64 **C** 81 **D** 121 **E** 125

KLAUSIMAI PO 5 TAŠKUS

B21. Elena atėjo į Aušros gimtadienio vakarėlį 5 minutėmis anksčiau negu Stasys, bet 3 minutėmis vėliau negu Ilona. Ilona išėjo iš vakarėlio pirmoji. Ji išėjo 2 minutėmis anksčiau negu Stasys ir 5 minutėmis anksčiau negu Elena. Kiek minučių Elena vakarėlyje išbuvo ilgiau negu Stasys?
A 2 **B** 4 **C** 6 **D** 8 **E** Stasys išbuvo ilgiau negu Elena

B22. Jeigu šeši šimtai šeši šveicarai suvalgo šešis šimtus šešias dešreles, iš jų šešis šimtus su garstyčiomis ir šešias – be, tai kiek dešrelių be garstyčių reikia patiekti šeši šimtai šešiems tūkstančiams šeši šimtai šešiems šveicarams?
A 606 **B** 1000 **C** 6006 **D** 606 606 **E** 600 600

B23. Keturios voverės sugraužė 1999 riešutus ir, be to, kiekviena iš jų sugraužė ne mažiau kaip 100 riešutų. Pirma voverė sugraužė daugiau riešutų negu kiekviena iš likusių. Yra žinoma, kad antra ir trečia voverė kartu sugraužė 1265 riešutus. Kiek riešutų sugraužė pirma voverė?
A 598 **B** 271 **C** 629 **D** 634 **E** Teisingas kitoks atsakymas

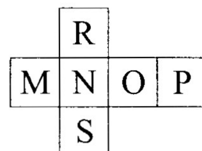
B24. Kai lyja, katinas tupi kambaryje arba rūsyje. Kai katinas kambaryje, tai pelė prieškambaryje, o sūris – šaldytuve. Kai sūris yra ant stalo, o katinas rūsyje, tai pelė yra kambaryje. Dabar lyja, o sūris ant stalo. Tada tikrai:
A Katinas kambaryje **B** Arba katinas kambaryje, arba pelė prieškambaryje
C Pelė prieškambaryje **D** Katinas rūsyje, o pelė kambaryje
E Tokia situacija neįmanoma

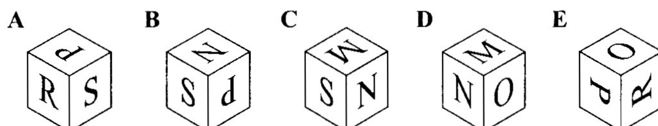
B25. Kiek daugiausiai smailiųjų kampų gali sudaryti šeši plokštumos spinduliai, išeinantys iš to paties taško?
A 6 **B** 8 **C** 9 **D** 12 **E** 15

B26. Skaičiaus 36 „produktas“ lygus 18. Skaičiaus 325 „produktas“ yra 30. Skaičiaus 45 „produktas“ lygus 20, o skaičiaus 30 „produktas“ lygus 0. Kam lygus skaičiaus 531 „produktas“ ?

A 10 **B** 15 **C** 16 **D** 21 **E** 22

B27. Šalia pavaizduota išklotinė atitinka tik vieną iš penkių apačioje pavaizduotų kubelių. Kurį?



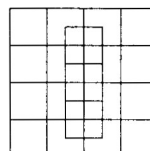


B28. Į kiekvieną iš penkių puodelių yra įpilta arba kavos, arba kakavos, arba pieno. Iš viso kavos yra įpilta du kartus daugiau negu kakavos. Nėra trijų puodelių su tuo pačiu gėrimu. Kuriame puodelyje yra kakava?



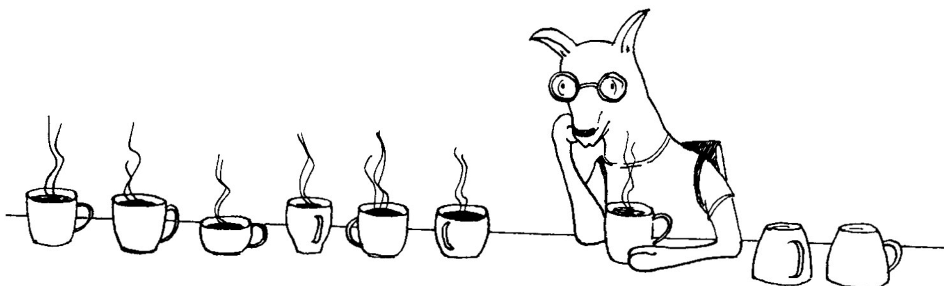
B29. Kiek kvadratų slypi šioje figūroje?

A 46 **B** 47 **C** 45 **D** 33 **E** 37

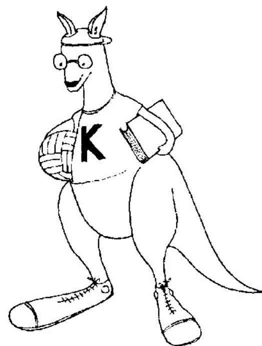


B30. Elektroninis laikrodis rodo valandas, minutes ir sekundes. Dabar yra 19:58:47. Šitame užraše visi skaitmenys skirtingi. Po kiek sekundžių pirmą kartą pasikartos panaši situacija, t.y. vėl visi skaitmenys bus skirtingi?

A 40 **B** 73 **C** 156 **D** 157 **E** 898

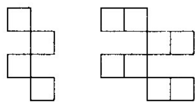


KADETAS (VII ir VIII klasės)



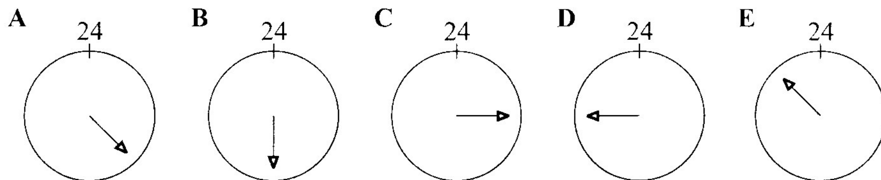
KLAUSIMAI PO 3 TAŠKUS

K1. Pirmos figūros perimetras lygus 16 cm. Koks yra antros figūros perimetras?



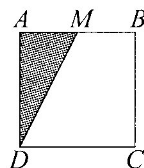
A 8 cm **B** 16 cm **C** 18 cm **D** 24 cm **E** 32 cm

K2. „Kengūriško“ laikrodžio ciferblatas padalytas į 24 dalis, o ne į 12, kaip įprasta. Todėl trumpoji (t.y. valandinė) rodyklė per parą padaro tik vieną pilną apsisukimą. Kokią padėtį trumpoji rodyklė užima „kengūriško“ laikrodžio ciferblate 6 valandą po pietų?



K3. Jonas pirko tam tikrą kiekį šratinukų ir tam tikrą kiekį pieštukų. Kiekvienas šratinukas kainavo 90 centų, o kiekvienas pieštukas – 40 centų. Iš viso jis sumokėjo 3 litus ir 50 centų. Kiek pieštukų pirko Jonas?
A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** 5

K4. Keturkampis $ABCD$ yra kvadratas, o taškas M yra kraštinės AB vidurys. Užtušuotos dalies plotas lygus 7 cm^2. Kvadrato $ABCD$ plotas lygus:
A 14 cm^2 **B** 21 cm^2 **C** 25 cm^2 **D** 28 cm^2 **E** 36 cm^2



K5. Karolis atsiverčia žodyną ir sako: „Jeigu prie puslapio, kurio man reikia, numerio pridėsiu sekančio puslapio numerį, tai gausiu 341“. Kurio puslapio reikia Karoliui?
A 171 **B** 341 **C** 147 **D** 170 **E** 174

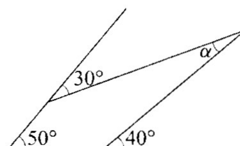
K6. Tą naktį pabudau. Mano laikrodis rodė 2^{00} po vidurnakčio. Pastebėjęs, kad laikrodis neina, prisukau jį ir užmigau. Kai rytą išėjau iš namų, mano laikrodis rodė 5^{30}, o gerai einantis bažnyčios laikrodis rodė 7^{00}. Kelintą valandą aš buvau pabudęs naktį?
A 4^{00} **B** 3^{30} **C** 0^{30} **D** 3^{00} **E** 4^{30}

K7. Tėvui 52 metai, o jo dviem sūnums 24 ir 18. Po kelerių metų tėvo amžius bus lygus abiejų jo sūnų metų sumai?
A 6 **B** 10 **C** 5 **D** 4 **E** 11

K8. Kvadratinis 10 cm × 10 cm popieriaus lapelis padalytas į 25 cm^2 ploto kvadratus. Kiekvienas iš tų kvadratų padalytas į du trikampius. Kiek gauta trikampių?
A 5 **B** 8 **C** 9 **D** 16 **E** 21

K9. Šuo yra 9 kartus sunkesnis už katiną, pelė yra 20 kartų lengvesnė už katiną, o ropė yra 6 kartus sunkesnė už pelę. Kelis kartus šuo sunkesnis už ropę?
A 30 **B** 27 **C** 1080 **D** 15 **E** Šuo lengvesnis už ropę

K10. Šalia esančiame piešinyje pavaizduoto kampo α didumas yra:
A 20° **B** 25° **C** 30° **D** 35° **E** 40°



KLAUSIMAI PO 4 TAŠKUS

K11. Jeigu

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{a}{b}=9,$$

tai $a+b=$
A 17 **B** 18 **C** 35 **D** 37 **E** 41

K12. $(1900+1901+1902+\cdots+1999)-(100+101+102+\cdots+199)=$
A 180 000 **B** 178 200 **C** 1 800 000 **D** 1 801 800 **E** 1 900 000

K13. Futbolo komandoje yra 11 žaidėjų. Vidutinis tų žaidėjų amžius lygus 22 metams. Rungtynių metu vienas iš tos komandos žaidėjų susižeidė ir buvo priverstas palikti aikštę. Tada likusiųjų futbolininkų vidutinis amžius pasidarė lygus 21 metams. Kiek metų turėjo susižeidęs futbolininkas?
A 21 **B** 22 **C** 23 **D** 32 **E** 33

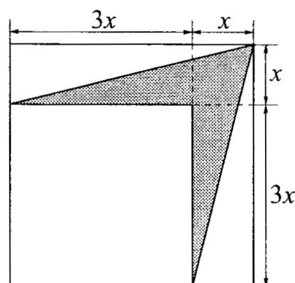
K14. Kai Jonukas eina į mokyklą pėsčias, o namo grįžta važiuodamas dviračiu, kartu tai jam užima $1\frac{1}{2}$ valandos. Kai jis į abi puses važiuoja dviračiu, jam tai užima $\frac{1}{2}$ valandos. Kiek laiko Jonukui užima nueiti į mokyklą ir grįžti pėsčiam?
A $1\frac{1}{4}$ h **B** 2 h **C** $2\frac{1}{2}$ h **D** $2\frac{3}{4}$ h **E** $3\frac{1}{2}$ h

K15. Magiškojo kvadrato kiekvienoje eilutėje, kiekviename stulpelyje ir kiekvienoje įstrižainėje visų elementų suma yra ta pati. Šalia pavaizduotas magiškasis kvadratas, iš kurio du skaičiai pašalinti, o kiti trys uždengti kortelėmis su raidėmis P, Q ir R. Kam yra lygi kortelėmis P, Q ir R uždengtų skaičių suma?
A 30 **B** 41 **C** 14 **D** 25 **E** Nustatyti neįmanoma

16	3	P
R	10	
Q		4

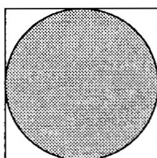
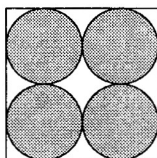
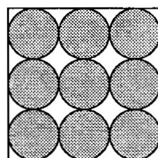
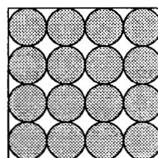
K16. Raudonkepuraitė savo močiutei suruošė krepšelį su vaisiais: 7 obuoliais, 8 kriaušėmis ir 3 apelsinais. Eidama pas močiutę, Raudonkepuraitė suvalgė 2 vaisius. Kokia situacija yra įmanoma:
A Močiutei neliko apelsinų **B** Močiutei liko mažiau kriaušių negu apelsinų
C Močiutei liko tiek pat kiekvienos rūšies vaisių **D** Močiutei liko tiek pat dviejų rūšių vaisių **E** Močiutei liko daugiau obuolių negu likusių vaisių

K17. Šalia pavaizduoto kvadrato užtušuotos dalies plotas lygus:
A x^2 **B** $3x^2$ **C** $6x^2$ **D** $7x^2$ **E** $9x^2$



K18. Didelis matmenų $9 \times 9 \times 9$ kubas sudėtas iš mažų kubelių $1 \times 1 \times 1$. Didysis kubas nuspalvintas. Keli iš mažųjų kubelių turi lygiai dvi nuspalvintas sienas?
A 84 **B** 54 **C** 100 **D** 108 **E** 478

K19. Kiekviename iš žemiau esančių piešinių pavaizduotas kvadratas su kraštine 1, kuriame yra užtušuotų skritulių. Kuriame piešinyje užtušuotas plotas yra didesnis negu likusiuose piešiniuose?

A 1 piešinyje **B** 2 piešinyje **C** 3 piešinyje **D** 4 piešinyje
E Visuose keturiuose piešiniuose užtušuoti plotai lygūs

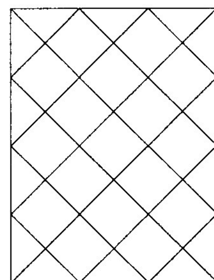
K20. Kurio iš stačiakampių su žemiau nurodytais matmenimis negalima sudėti iš figūrų , sudarytų iš 4 vienetinių kvadratų?

A 4×4 **B** 6×6 **C** 8×8 **D** 4×6 **E** 6×8

KLAUSIMAI PO 5 TAŠKUS

K21. Turime tris skaičius: 3^{3^3}, 3^{33} ir $(3^3)^3$. Jeigu didžiausią iš jų padalysime iš mažiausio, tai dalmuo bus lygus:
A 1 **B** 3 **C** 3^9 **D** 3^{18} **E** 3^{24}

K22. Teste yra 30 klausimų. Už teisingą atsakymą duodami 7 taškai, bet jeigu atsakymas klaidingas arba iš viso neduotas, tai iš bendro taškų skaičiaus atimama 12 taškų. Kaziukas už testą gavo 77 taškus. Į kiek klausimų jis nedavė teisingo atsakymo?
A Nuo 0 iki 4 **B** Nuo 5 iki 8 **C** Nuo 9 iki 12 **D** Nuo 13 iki 16
E Nuo 17 iki 20

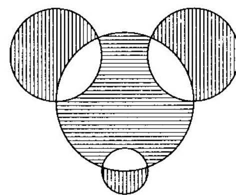


K23. Šalia esančiame piešinyje pavaizduotos grindys yra stačiakampio formos, kurio plotis 3 m, o ilgis – 4 m. Grindys išklotos keraminėmis plytelėmis, ir tam sunaudota 17 kvadratinių plytelių ir 14 trikampių plytelių. Reikia tokiu pat būdu ir tokiomis pat plytelėmis iškloti grindis, kurių matmenys $10\,\text{m} \times 20\,\text{m}$. Kiek tam prireiks kvadratinių plytelių?
A 200 **B** 230 **C** 300 **D** 370 **E** 400

K24. Bilieto į teatrą kaina padidėjo 40%, bet įplaukos už tuos bilietus padidėjo tik 26%. Kiek procentų sumažėjo žiūrovų skaičius?
A 10% **B** 14% **C** 20% **D** 38% **E** 50%

K25. Petras, Paulius ir jų senelis meškeriojo. Per tą laiką, kai senelis pagaudavo 8 žuvis, Paulius pagaudavo 4, o Petras – 7 žuvis. Per vieną valandą Petras sugavo 42 žuvis. Kiek žuvų per tą valandą sugavo visi trys kartu?
A 58 **B** 94 **C** 114 **D** 125 **E** 132

K26. Kiek skirtingų sprendinių natūraliaisiais skaičiais turi lygtis $a^2b - 1 = 1999$?
A 3 **B** 4 **C** 5 **D** 6 **E** 7



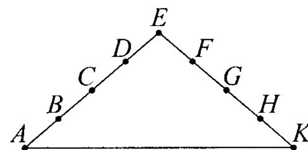
K27. Srities, užbrūkšniuotos vertikaliomis linijomis, plotą pažymėkime P, o plotą srities, užbrūkšniuotos horizontaliomis linijomis – S. Skritulių skersmenys atitinkamai lygūs 6, 4, 4, 2. Tada:
A $2P = S$ **B** $3P = 2S$ **C** $P = S$ **D** $2P = 3S$
E $P = 2S$

K28. Šalia pavaizduotoje sudėtyje kiekviena raidė žymi tam tikrą skaitmenį, tas pačias raides atitinka vienodi skaitmenys, o skirtingas raides – skirtingi skaitmenys. Šitame užraše skaitmens 0 nėra. Kokia gali būti didžiausia sumos DREI reikšmė?

$$\begin{array}{r} \text{ONE} \\ +\ \text{DEUX} \\ \hline \text{DREI} \end{array}$$

A 9863 **B** 9873 **C** 9874 **D** 9875 **E** 9876

K29. Skaičius 1999 padaugintas iš skaičiaus, kurio dešimtainį užrašą sudaro 1999 vienetai. Kokia yra gautos sandaugos skaitmenų suma?
A 1998 **B** 2026 **C** 2138 **D** 2972 **E** 3956



K30. Šalia esančiame piešinyje pavaizduota trasa, einanti į kalvos viršūnę ir po to priešingu šlaitu žemyn. Atstumai tarp gretimų punktų yra vienodi. Kopdamas į kalvą, Petras užtrunka tiek pat laiko įveikdamas kiekvieną atkarpą tarp dviejų gretimų punktų.

Kopdamas į kalvą, Petras sugaišta daugiau laiko negu leisdamasis žemyn, bet ir leisdamasis jis užtrunka tiek pat laiko kiekvienoje atkarpoje tarp gretimų punktų. Kuris iš žemiau nurodytų maršrutų užims Petrui mažiausiai laiko?
A $C \to E \to G \to F$ **B** $A \to E \to F$ **C** $D \to E \to K \to H$
D $C \to E \to H$ **E** $D \to E \to H \to F$

JUNIORAS (IX ir X klasės)



KLAUSIMAI PO 3 TAŠKUS

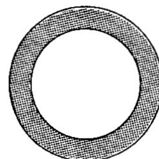
J1. „Kenga“ yra kubinis kauliukas, kurio 3 sienelės nudažytos raudonai ir 3 – žaliai. Kiek galima padaryti skirtingų „Kengos“ kauliukų?
A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** 6

J2. Mano keturi bičiuliai ir aš susimetėm pinigų tortui pirkti; vidutiniškai kiekvienas davė po 8 litus. Aš daviau 10 litų. Kiek vidutiniškai litų davė kiekvienas iš mano bičiulių?
A 6 **B** 6,50 **C** 7 **D** 7,50 **E** 8

J3. Pasakiau, kad tam tikras natūralusis skaičius yra skaičių 2 ir 5 kartotinis. Deja, aš apsirikau. Kuris iš žemiau parašytų sakinių yra tikrai teisingas?
A Tas skaičius nėra skaičiaus 3 kartotinis
B Tas skaičius nėra skaičiaus 7 kartotinis
C Tas skaičius nėra skaičiaus 10 kartotinis
D Tas skaičius yra skaičiaus 2 arba skaičiaus 5 kartotinis
E Tas skaičius yra skaičiaus 2 ir skaičiaus 5 kartotinis

J4. Vienoje šeimoje yra penkios mergaitės: Aušra, Beatričė, Celestina, Danutė ir Elena. Jos yra gimusios nurodyta tvarka kas 3 metai. Vyriausioji Aušra 7 kartus vyresnė už jauniausiąją Eleną. Kiek metų Celestinai?
A 5 **B** 7 **C** 8 **D** 9 **E** 15

J5. Mažesniojo skritulio skersmuo lygus 5 cm, o didesniojo – 7 cm. Užtušuotos srities plotas lygus:
A 5π **B** 6π **C** 7π **D** 12π **E** 24π



J6. Oskaras skaitmenis žymi tokiais ženklais: 0123456789. Jis suskaičiavo reiškinio

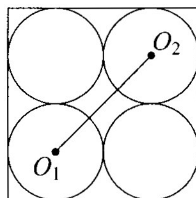
$$\left(\frac{1}{0{,}16} + \frac{1}{0{,}125}\right) \cdot 50 - 2{,}5$$

reikšmę ir, žiūrėdamas į rezultatą „aukštyn kojomis“, pamatė tokį „žodį“:

A OIL **B** BIL **C** hIL **D** ShE **E** ShOE

J7. Teigiamųjų realiųjų skaičių poros (x_0, y_0) ir $(3x_0, ty_0)$ tenkina lygtį $3x^3 = 2y^2$. Kam lygus t?
A 3 **B** $\sqrt{3}$ **C** $\sqrt{3^3}$ **D** 18 **E** 27

J8. Kvadrato kraštinės ilgis yra $2a$. Raskite atkarpos O_1O_2, jungiančios skritulių centrus, ilgį.



A $2a\sqrt{2}$ **B** $a\sqrt{2}$ **C** $a(\sqrt{2}-1)$ **D** $2a\sqrt{2}-1$
E $a(\sqrt{2}-2)$

J9. Skaičiaus $1+9^{99}$ vienetų skaitmuo yra:
A 0 **B** 2 **C** 4 **D** 6 **E** 8

J10. Per „Kengūros" varžybas Marytė kiekvieną 3 taškų uždavinį išsprendžia per 2 minutes, kiekvieną 4 taškų uždavinį – per 3 minutes, o kiekvieną 5 taškų uždavinį – per 5 minutes. Kiek daugiausiai taškų ji gali surinkti per 15 minučių?
A 15 **B** 20 **C** 21 **D** 22 **E** 23

KLAUSIMAI PO 4 TAŠKUS

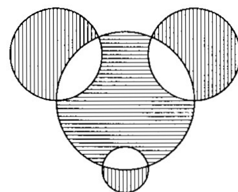
J11. Funkcija f apibrėžta visų realiųjų skaičių aibėje ir su bet kuriais x, y tenkina lygybę $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$. Kam lygu $f(1999)$?
A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 1999 **E** Nustatyti neįmanoma

J12. Mano trys mėlynos papūgos sulesa 3 kg grūdų per 3 dienas, mano penkios žalios papūgos sulesa 5 kg grūdų per 5 dienas ir mano 7 oranžinės papūgos sulesa 7 kg grūdų per 7 dienas. Kurių papūgų apetitas didžiausias?
A Mėlynų **B** Žalių **C** Oranžinių **D** Visų apetitas vienodas
E Nustatyti neįmanoma

J13. Jeigu sukeisčiau skaitmenis dviženkliame skaičiuje, reiškiančiame mano tėvo amžių, tai gaučiau mano amžių išreiškiantį skaičių. Kuris iš žemiau nurodytų skaičių gali reikšti mano tėvo amžių mano gimimo metu?
A 24 **B** 25 **C** 26 **D** 27 **E** 28

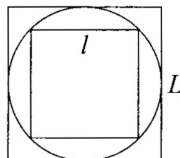
J14. Reiškinys $1+2-3-4+5+6-7-8+\cdots-60$ yra lygus:
A -60 **B** -30 **C** 0 **D** 36 **E** 60

J15. Srities, užbrūkšniuotos vertikaliomis linijomis, plotą pažymėkime P, o plotą srities, užbrūkšniuotos horizontaliomis linijomis, – S. Skritulių skersmenys atitinkamai lygūs 6, 4, 4, 2. Tada:

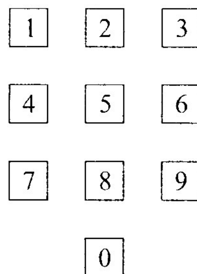


A $2P=S$ **B** $3P=2S$ **C** $P=S$
D $2P=3S$ **E** $P=2S$

J16. Dalmuo $\frac{l}{L}$, kur l ir L yra kvadratų kraštinių ilgiai, yra lygus:
A $\frac{1}{2}$ **B** $\frac{1}{4}$ **C** $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **D** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **E** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

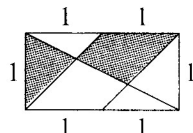


J17. Mano telefono skaitmenys išdėstyti, kaip pavaizduota piešinyje. Atstumas tarp bet kurių dviejų gretimų (ir vertikaliai, ir horizontaliai) kvadratų centrų lygus 2 cm. Koks yra ilgis laužtės, kurią brėžia mano pirštas, kai aš renku numerį 2616565?



A $4\sqrt{2}+2\sqrt{5}+4$ **B** $4\sqrt{5}+2\sqrt{2}+6$
C $4\sqrt{5}+2\sqrt{2}+4$ **D** $6\sqrt{2}+2\sqrt{5}+4$
E $2\sqrt{2}+4\sqrt{5}+8$

J18. Koks yra užtušuotos srities ploto ir viso stačiakampio ploto santykis?



A $\frac{1}{4}$ **B** $\frac{1}{3}$ **C** $\frac{2}{5}$ **D** $\frac{5}{12}$ **E** $\frac{1}{2}$

J19. Mano automobilio laikrodis nerodo sekundžių. Mano kelionės metu 235 kilometre laikrodis rodė 9^{10}, o 245 kilometre – rodė 9^{17}. Mano automobilio greitis v (km/h) buvo:

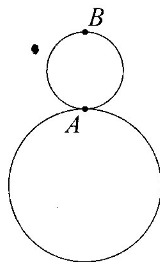
A $v \leqslant 75$ **B** $75 \leqslant v \leqslant 100$ **C** $v = 75$ **D** $v = 100$ **E** $v \geqslant 100$

J20. Natūralusis skaičius a yra toks, kad $a = \sqrt[3]{***9}$. Kam lygus a?

A 29 **B** 23 **C** 19 **D** 13 **E** Kitoks skaičius

KLAUSIMAI PO 5 TAŠKUS

J21. Spindulio r moneta neslysdama rieda aplink didesnę monetą, ir grįžus jai į pradinę padėtį taškas B atsidūrė padėtyje A (žr. piešinį). Mažiausias įmanomas didesnės monetos spindulys lygus:



A $\frac{5}{4}r$ **B** $\frac{3}{2}r$ **C** $2r$ **D** $\frac{5}{2}r$ **E** $4r$

J22. Matematinis automatas veikia pagal tokią taisyklę: prie duotojo skaičiaus prideda 1 arba skaičių padvigubina. Atlikęs kiekvieną operaciją, jis vėl veikia pagal tą pačią taisyklę. Į automatą įvestas skaičius 0. Automatas po tam tikro operacijų skaičiaus gavo skaičių 100. Koks yra mažiausias operacijų skaičius, kurias turėjo atlikti automatas, kad gautų tokį rezultatą?

A 8 **B** 9 **C** 10 **D** 28 **E** 43

J23. Kiek sveikųjų sprendinių turi lygtis $2^x(6-x)=8x$?

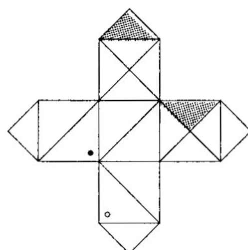
A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** 4

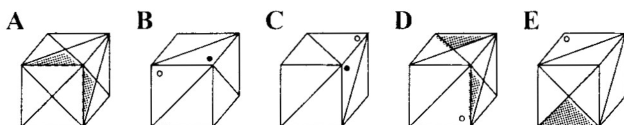
J24. Šalia pavaizduotoje sudėtyje kiekviena raidė žymi tam tikrą skaitmenį, tas pačias raides atitinka vienodi skaitmenys, o skirtingas raides – skirtingi skaitmenys. Šitame užraše skaitmens 0 nėra. Kokia gali būti didžiausia sumos DREI reikšmė?

$$\begin{array}{r} \text{ONE} \\ +\ \text{DEUX} \\ \hline \text{DREI} \end{array}$$

A 9863 **B** 9873 **C** 9874 **D** 9875 **E** 9876

J25. Iš kartono, turinčio šalia esančiame piešinyje pavaizduotos figūros formą, suklijuotas kubas. Kurio iš žemiau pavaizduotų kubų negalėtume taip gauti?





J26. Prie įėjimo į tvirtovę sukrauta vienodų patrankos sviedinių piramidė. Jos pagrindas yra lygiakraštis trikampis. Kiek sviedinių gali būti piramidėje?
A 200 **B** 210 **C** 220 **D** 250 **E** 256

J27. Kiek daugiausiai poaibių, turinčių ne daugiau kaip 3 elementus, galima sudaryti iš septynelementės aibės taip, kad bet kurie du poaibiai turėtų lygiai vieną bendrą elementą?
A 3 **B** 5 **C** 7 **D** 9 **E** 11

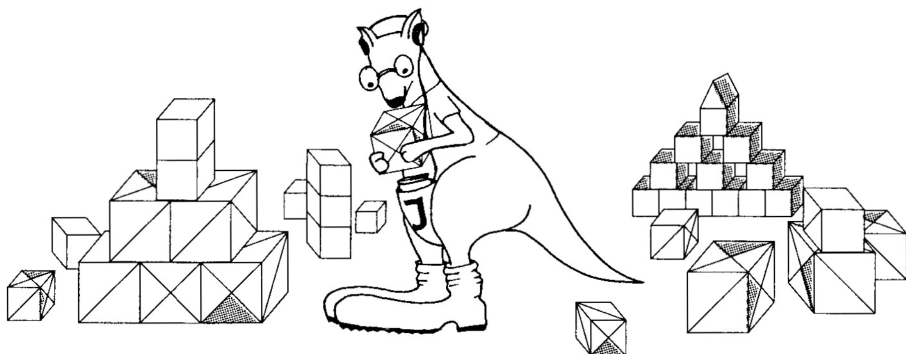
J28. Funkcija f apibrėžta visų natūraliųjų skaičių aibėje taip:

$$f(n) = \begin{cases} n+5, & \text{jei } n \text{ nelyginis,} \\ \dfrac{n}{2}, & \text{jei } n \text{ lyginis.} \end{cases}$$

Kam lygi skaitmenų suma nelyginio skaičiaus k, su kuriuo $f(f(f(k))) = 35$?
A 8 **B** 9 **C** 10 **D** 12 **E** 15

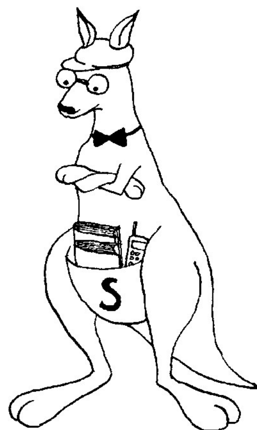
J29. Smailiojo trikampio ABC aukštinių susikirtimo tašką pažymėkime M. Jeigu $AB = CM$, tai trikampio ABC kampas C lygus:
A 15° **B** 30° **C** 36° **D** 45° **E** 60°

J30. Kiek teigiamų daliklių turi skaičius $6n$, jeigu yra žinoma, kad skaičius $2n$ turi 28 teigiamus daliklius, o skaičius $3n$ jų turi 30?
A 32 **B** 34 **C** 35 **D** 36 **E** 38

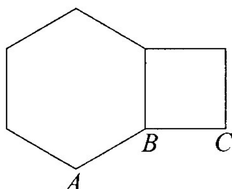


SENJORAS (XI ir XII klasės)

KLAUSIMAI PO 3 TAŠKUS

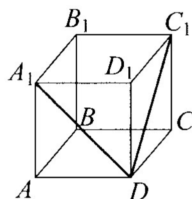


S1. Žemiau esančiame piešinyje pavaizduotas kvadratas ir taisyklingasis šešiakampis. Atkarpos AB ir BC yra gretimos tam tikro taisyklingojo daugiakampio kraštinės. Kiek kraštinių turi tas daugiakampis?



A 18 **B** 15 **C** 12 **D** 10 **E** 8

S2. Kampas tarp kubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ sienų įstrižainių A_1D ir DC_1 lygus:
A 60° **B** 80° **C** 45° **D** 90° **E** 75°



S3. Kiek yra tokių natūraliųjų skaičių, mažesnių už 1000, kuriuos galima išreikšti dviejų lyginių skaičių sandauga?
A 100 **B** 150 **C** 200 **D** 220 **E** 249

S4. Skaičiaus $1999^{1998^{1997^{\cdot^{\cdot^{2^1}}}}}$ vienetų skaitmuo yra:
A 1 **B** 3 **C** 7 **D** 9 **E** Kitoks skaitmuo

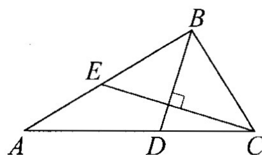
S5. Funkcija f apibrėžta visiems realiesiems skaičiams ir įgyja tik teigiamąsias reikšmes. Ji tenkina tokias sąlygas: $f(x+y) = f(x)f(y)$ su visais realiaisiais x ir y, $f(1) = 2$. Kam lygu $f(\frac{1}{2})$?
A 0 **B** $\frac{1}{2}$ **C** 1 **D** $\sqrt{2}$ **E** 4

S6. Dolerio kursas trijose valiutos keityklose vakar rytą buvo toks pat. Pirmoje keitykloje prieš pietus kursas padidėjo 1%, o po pietų sumažėjo 1%. Antroje keitykloje prieš pietus kursas sumažėjo 1%, o po pietų padidėjo 1%. Trečioje keitykloje dolerio kursas nekito. Kurioje iš keityklų vakarykštei dienai baigiantis dolerio kursas buvo aukščiausias?
A Visose trijose buvo toks pat **B** Pirmoje **C** Antroje **D** Trečioje
E Pirmoje ir antroje

S7. Kuris iš žemiau nurodytų skaičių lygus $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$?
A $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$ **B** $1+\sqrt{2}$ **C** $1+2\sqrt{2}$ **D** $\sqrt{3}+\sqrt{8}$ **E** $\sqrt{3}+\sqrt{2\sqrt{2}}$

S8. Stačiojo trikampio perimetras lygus 18. Visų trijų jo kraštinių ilgių kvadratų suma lygi 128. Kam lygus to trikampio plotas?
A 18 **B** 16 **C** 12 **D** 10 **E** 9

S9. Trikampio ABC pusiaukraštinės BD ir CE yra statmenos, $BD = 8$, $CE = 12$. Kam lygus trikampio ABC plotas?
A 24 **B** 32 **C** 48 **D** 64 **E** 96

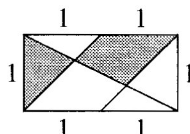


S10. Jeigu sukeisčiau skaitmenis dviženkliame skaičiuje, reiškiančiame mano tėvo amžių, tai gaučiau mano amžių išreiškiantį skaičių. Kuris iš žemiau nurodytų skaičių gali reikšti tėvo amžių mano gimimo metu?
A 24 **B** 25 **C** 26 **D** 27 **E** 28

KLAUSIMAI PO 4 TAŠKUS

S11. Kiek yra sveikųjų skaičių n, su kuriais reiškinio $\frac{2n^2+9n+13}{n+2}$ reikšmė yra natūralusis skaičius?
A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** 5

S12. Kam lygus užtušuotos stačiakampio dalies plotas?
A $\frac{1}{2}$ **B** $\frac{2}{3}$ **C** $\frac{4}{5}$ **D** $\frac{5}{6}$ **E** 1



S13. Sakykime, kad

$$a = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{4 + \sqrt{5 + \sqrt{6}}}}}}.$$

Kuri iš žemiau parašytų nelygybių teisinga?
A $1 \leqslant a < 2$ **B** $2 \leqslant a < 3$ **C** $3 \leqslant a < 4$ **D** $4 \leqslant a < 5$ **E** $5 \leqslant a < 6$

S14. Apskritas 2 m skersmens stalas uždengtas plona kvadratine staltiese, kurios kraštinės ilgis lygus 2,5 m. Staltiesės centras sutampa su stalo centru. Koks yra aukščiausiai nuo grindų esančio staltiesės krašto taško ir žemiausiai esančio staltiesės krašto taško aukščių skirtumas?
A 0,25 m **B** 0,5 m **C** $\frac{5\sqrt{2}-5}{4}$ m **D** $\frac{5\sqrt{2}-2}{2}$ m **E** Nustatyti neįmanoma

S15. Funkcija f apibrėžta formule

$$f(x) = x^2 + \sqrt{x^4 + 1} + \frac{1}{x^2 - \sqrt{x^4 + 1}}.$$

Kam lygu $f(1999^{2000})$?
A $-\frac{1}{1999^{1000}}$ **B** $-\frac{1}{1999^{2000}}$ **C** 0 **D** $\frac{1}{1999^{2000}}$ **E** $\frac{1}{1999^{1000}}$

S16. Įprastinė 8×8 šachmatų lenta sudaryta iš 64 kvadratinių langelių. Kiek kvadratų, sudarytų iš tų kvadratinių langelių, galima įžiūrėti šachmatų lentoje?
A 64 **B** 65 **C** 113 **D** 114 **E** 204

S17. Kurį iš žemiau nurodytų skaičių reikėtų įstatyti vietoje n į reiškinį $1999^n - 1998n - 1$, kad gautume skaičių, kuris dalijasi iš $1998 \cdot 1999$?
A 1997 **B** 1998 **C** 1999 **D** 2000 **E** 2001

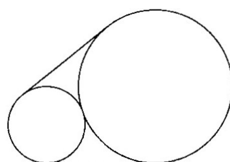
S18. Dviejų iš trijų daugianario $x^3 + ax^2 + bx + c$ šaknų suma lygi 0. Kam lygus c?
A $a+b$ **B** $\frac{a}{b}$ **C** ab **D** $a-b$ **E** a^b

S19. Kiek realiųjų šaknų turi lygtis $x^2 - [x] = 3$?
($[x]$ yra didžiausias sveikasis skaičius, ne didesnis už x.)
A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** 4

S20. Kiek šaknų turi lygtis $|||x| - 1| - 2| - 3| = 2{,}5$?
A 2 **B** 4 **C** 6 **D** 8 **E** 10

KLAUSIMAI PO 5 TAŠKUS

S21. Du apskritimai, kurių skersmenys yra 6 cm ir 18 cm, liečiasi iš išorės. Juos kartu apjuosėme virvute (žr. piešinį). Koks tos virvutės ilgis?



A $10 + 20\pi$ cm **B** $12\sqrt{3} + 14\pi$ cm
C $13\sqrt{3} + 12\pi$ cm **D** $14\sqrt{3} + 11\pi$ cm
E Kitoks rezultatas

S22. Rašydami iš eilės einančių natūraliųjų skaičių kvadratus, gauname skaitmenų seką

149162536496481 . . . .

Koks skaitmuo yra šimtojoje šios sekos vietoje?
A 1 **B** 3 **C** 5 **D** 7 **E** 9

S23. Vienoje saloje gyvena tiktai teisuoliai, kurie visada sako tiesą, ir melagiai, kurie visada meluoja. Bendras tos salos gyventojų skaičius yra 1999. Kiekvienas iš jų turi vienintelę aistrą – mėgsta arba dainuoti, arba žaisti futbolą, arba meškerioti. Kiekvienam salos gyventojui buvo užduoti 3 klausimai:
1) Ar mėgstate dainuoti?
2) Ar mėgstate žaisti futbolą?
3) Ar mėgstate meškerioti?
Į pirmą klausimą teigiamai atsakė 1000, į antrą – 700, į trečią – 500 asmenų. Kiek melagių gyvena toje saloje?
A 102 **B** 180 **C** 201 **D** 322 **E** 729

S24. Pradėdami nuo kairiojo viršutinio kampo šalia pavaizduotoje diagramoje, einame nuo raidės prie raidės dešinėn arba žemyn. Keliais būdais taip galime gauti žodį „KANGUR“?
A 8 **B** 32 **C** 64 **D** 128 **E** 256

K A N G U R
A N G U R
N G U R
G U R
U R
R

Pastaba. Žodis KANGUR lenkiškai reiškia „kengūrą“.

S25. Taškas P yra kvadrato $ABCD$ viduje, o to taško atstumai iki viršūnių A, B ir C atitinkamai lygūs 2, 7 ir 9. Taško P atstumas iki viršūnės D yra:
A 3 **B** 5 **C** 6 **D** 7 **E** 8

S26. Kiek daugiausiai poaibių, turinčių ne daugiau kaip 3 elementus, galima sudaryti iš septynelementės aibės taip, kad bet kurie du poaibiai turėtų lygiai vieną bendrą elementą?
A 3 **B** 5 **C** 6 **D** 7 **E** 9

S27. Trikampio kampų didumai sutinka kaip 1 : 5 : 6. Ilgiausios kraštinės ilgis yra 6 cm. Koks yra ilgis aukštinės, nuleistos į ilgiausią kraštinę?
A 1 cm **B** 1,5 cm **C** 2 cm **D** 2,5 cm **E** 3 cm

S28. Funkcija f apibrėžta visų natūraliųjų skaičių aibėje taip:

$$f(n) = \begin{cases} n+5, & \text{jei } n \text{ nelyginis,} \\ \dfrac{n}{2}, & \text{jei } n \text{ lyginis.} \end{cases}$$

Kam lygi skaitmenų suma nelyginio skaičiaus k, su kuriuo $f(f(f(k))) = 35$?
A 15 **B** 12 **C** 10 **D** 9 **E** 8

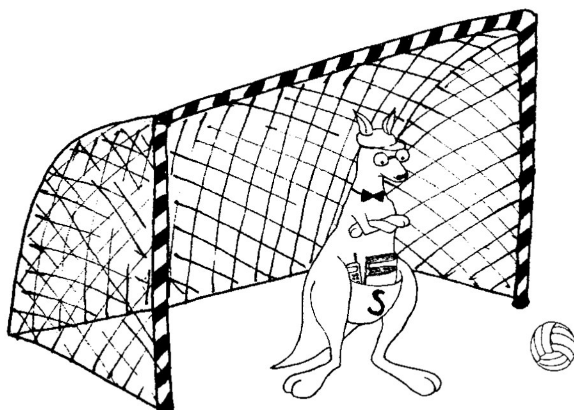
S29. Mokyklos rankinio turnyre kiekviena komanda sužaidė su kiekviena kita komanda vienerias rungtynes. Už pergalę komanda gaudavo 2 taškus, už pralaimėjimą – 0 taškų, o už lygiąsias abi komandos gaudavo po tašką. Turnyro nugalėtoja per visą turnyrą pelnė 7 taškus, antros vietos laimėtoja – 5 taškus, o trečios vietos laimėtoja – 3 taškus. Kiek taškų pelnė komanda, užėmusi paskutinę vietą?
A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** Nustatyti neįmanoma

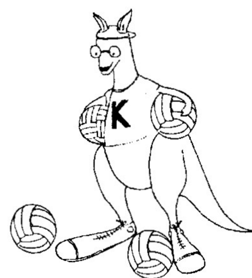
S30. Seka (a_n), $n \geqslant 1$, apibrėžta pagal taisyklę:

$$a_1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 1998 \cdot 1999 = 1999!,$$

$$a_{n+1} = \text{skaičiaus } a_n \text{ skaitmenų suma, kai } n \geqslant 1.$$

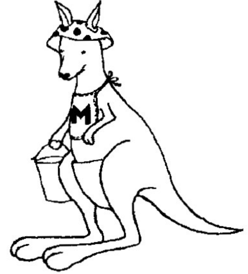
Kam lygus a_{1999}?
A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 6 **E** 9





SPRENDIMAI

MAŽYLIS (III ir IV klasės)



M1. Beatričė turi dvi lėles, tris obuolius, vieną šokoladuką, du apelsinus, penkis persikus ir vieną dviratį. Kiek vaisių turi Beatričė?

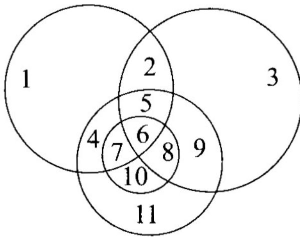
A 3 **B** 5 **Ⓒ** 10 **D** 18 **E** 21

? Čia geriau ne spėlioti, o imti ir suskaičiuoti vaisius.

! Iš paminėto Beatričės turto vaisiai tėra tik obuoliai, apelsinai ir persikai. Taigi vaisių Beatričė turi $3 + 2 + 5 = 10$, ir teisingas atsakymas C.

M2. Kuriuo numeriu pažymėta bendra visų keturių skritulių dalis?

A 5 **B** 9 **C** 7 **D** 4 **Ⓔ** 6



? Vien tik užmetus akį, aišku, kad tai numeris 6, ir teisingas atsakymas E.

! Mažiausiai pažymėtų dalių yra mažajame skritulyje – tik keturios (6, 7, 8, 10), tai nuo jo pradėti patogiausia. Bet 7 dalis neįeina į dešinį skritulį, 8 dalis neįeina į kairį skritulį, 10 dalis neįeina į viršutinius skritulius, taigi lieka tik 6 dalis.
Pasitikrinę matome, kad 6 dalis tikrai įeina į visus keturis skritulius.

M3. Keliose vietose reikia perlaužti medinę lazdelę, kad gautume 5 dalis?

A 3 **Ⓑ** 4 **C** 5 **D** 6 **E** Tai priklauso nuo lazdelės ilgio

? Paskubėjus galima neteisingai atsakyti, kad lazdelę reikia perlaužti 5 vietose. Iš tikrųjų, jei lazdelę perlaušime 1 vietoje, turėsime 2 dalis, todėl jei perlaušime 4 vietose, turėsime 5 dalis, ir teisingas atsakymas B.

! Kiekvienas laužimas dalių skaičių padidina vienetu. Kadangi iš pradžių turime 1 dalį, tai po n laužimų turėsime $n+1$ dalį, ir tai visiškai nepriklauso nei nuo tvarkos, nei nuo vietos, kur laušime, nei nuo lazdelės ilgio. Taigi 5 dalis gausime po 4 laužimų, ir teisingas tik atsakymas B.

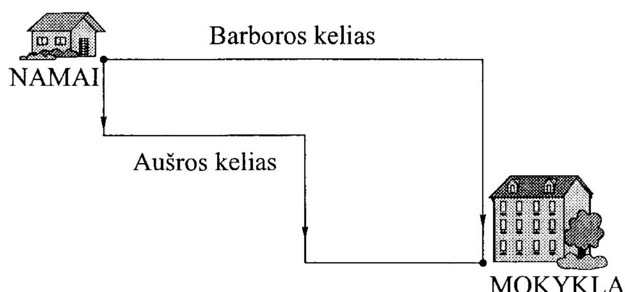
M4. Kaziukui dabar 10 metų, o Alei 3 metai. Po kelerių metų Kaziukas bus dukart vyresnis už Alę?
A 5 **B** 10 **(C)** 4 **D** 1 **E** 3

? Nesunku peržiūrėti visus atsakymus ir išrinkti teisingą. Tikriname atsakymą A. Po 5 metų Kaziukui bus 15 metų, o Alei – 8, ir Kaziukas nebus 2 kartus vyresnis. Po 10 metų Kaziukui bus 20 metų, o Alei – 13, taigi ir atsakymas B netinka. Po 4 metų Kaziukui bus 14 metų, o Alei 7 metai. Kaziukas bus 2 kartus vyresnis, taigi teisingas atsakymas C.

! Kai Kaziukas bus dukart vyresnis už Alę, tai jų metų skirtumas bus lygus Alės amžiui. Bet Kaziuko ir Alės metų skirtumas nekinta ir lygus $10 - 3 = 7$ metams. Vadinasi, Kaziukas bus dukart vyresnis už Alę tada, kai jai bus 7 metai, o tai įvyks po 4 metų.

!! Sudarykime lygtį. Sakykime, kad Kaziukas dukart vyresnis už Alę bus po x metų. Tada Kaziukui bus $10 + x$ metų, o Alei $3 + x$ metų. Pagal sąlygą $10 + x = 2(3 + x)$. Iš čia $x = 4$. Taigi teisingas atsakymas C.

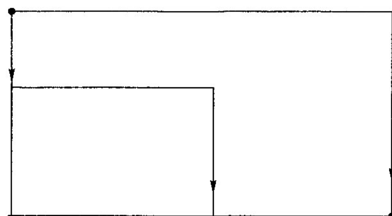
M5. Aušra ir jos sesuo Barbora lanko tą pačią mokyklą, bet į ją eina skirtingais keliais. Kurios kelias trumpesnis?



A Aušros kelias **B** Barboros kelias **C** Tai priklauso nuo atstumo iki mokyklos
(D) Abiejų kelių ilgis vienodas **E** Nustatyti neįmanoma

? „Iš akies" matyti, kad abiejų kelių ilgis vienodas, taigi teisingas atsakymas D. Pavojingiau tai tikrinti liniuote – ne taip jau lengva tiksliai matuoti tokiame mažame brėžinyje.

! Pataisykime Aušros kelią nuo posūkio, kad iš pradžių ji eitų „žemyn", o paskui į dešinę.



Aišku, kad pataisytas Aušros kelias lygus senajam – anksčiau ji ėjo dviem gretimomis mažojo stačiakampio kraštinėmis, dabar tokių pat ilgių kitomis stačiakampio kraštinėmis. O štai „pataisytas“ Aušros kelias ir Barboros kelias vienodo ilgio – abu jie eina to paties didžiojo stačiakampio kraštinėmis.

!! Aušros kelias susideda iš kelio „žemyn“ ir kelio „dešinėn“. Matome, kad tiek žemyn, tiek ir dešinėn Aušra eina tiek pat, kiek ir sesuo. Vadinasi, jų keliai lygūs.

M6. Mūsų klasėje yra 30 mokinių. Berniukų joje keturis kartus daugiau negu mergaičių. Kiek mergaičių mokosi mūsų klasėje?
A 24 **B** 16 **C** 12 **D** 8 **Ⓔ** 6

? Tikriname atsakymą A. Jeigu mergaičių 24, tai berniukų 6, o tada ne berniukų 4 kartus daugiau, o mergaičių. Todėl aišku, kad tinka atsakymas E.

! Kadangi berniukų 4 kartus daugiau negu mergaičių, tai klasės mokinių skaičius 5 kartus didesnis už mergaičių skaičių. Bet klasėje yra 30 mokinių, taigi mergaičių yra $30 : 5 = 6$.

!! Galima sudaryti lygtį. Jei mergaičių klasėje x, tai berniukų $4x$. Vadinasi, $4x + x = 30$, o iš čia $5x = 30$, $x = 6$.

M7. Kiek sveria apelsinas?
A 200 g **B** 205 g **Ⓒ** 155 g **D** 5 g
E Nustatyti neįmanoma



? Jeigu apelsinas svertų 200 g, tai kairėje būtų $200+5 = 200$ g, o dešinėje $200+50 = 250$ g. Jeigu apelsinas svertų 205 g, tai dešinėje būtų $205 + 50 = 255$ g. Jeigu apelsinas svertų 155 g, tai dešinėje būtų $155 + 50 = 205$ g – tiek pat, kiek ir kairėje. Vadinasi, teisingas atsakymas C.

! Kairėje yra 205 g. Kadangi svarstyklės pusiausviros, tai tiek pat gramų yra ir dešinėje. Todėl apelsinas sveria $205 - 50 = 155$ g.

!! Lygtis $200 + 5 = x + 50$ taip pat duoda atsakymą $x = 205 - 50 = 155$.

M8. „Mano uodega, – sako katinas, – lygi 12 cm ir dar pusė mano uodegos ilgio“. Koks katino uodegos ilgis?
A 18 cm **Ⓑ** 24 cm **C** 12 cm **D** 9 cm **E** 6 cm

? Tikriname atsakymą A – uodegos ilgis 18 cm. Tada pusė uodegos yra 9 cm, o pridėję 12 cm gauname 21 cm – tai nėra uodegos ilgis. Atsakymas B duoda pusę uodegos 12 cm, o pridėję 12 cm gauname 24 cm. Tai sutampa su uodegos ilgiu. Vadinasi, atsakymas yra B.

! Iš sąlygos išplaukia, kad pusė uodegos yra 12 cm, todėl uodega lygi 24 cm.

!! Jeigu uodega yra x cm, tai gauname lygtį $x = 12 + \frac{x}{2}$, iš jos $\frac{x}{2} = 12$, $x = 24$.

M9. Mano mamos gimtadienis bus sekmadienį, o tėtės – 55 dienomis vėliau. Kurią savaitės dieną bus tėtės gimtadienis?
A Sekmadienį **B** Pirmadienį **C** Antradienį **D** Ketvirtadienį
(E) Šeštadienį

? Atspėti atsakymą sunku – reikia dienas suskaičiuoti. Tai nesunku padaryti, skaičiuojant popieriuje:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
Pi	A	T	K	Pe	Š	S	Pi	A	...

Po skaičiais nuo 1 iki 55 rašome savaitės dienas – pirmadienis, antradienis ir t.t. Taip nesunkiai per dvi minutes gausime atsakymą: po skaičiumi 54 bus Pe, o po 55 bus Š – šeštadienis.
Beje, galima nieko ir nerašyti – prisiminkime gerai žinomą būdą, kaip nustatyti, kurie mėnesiai turi 31 dieną. Suspaudžiame vieną ranką į kumštį ir einame jos krumpliais ir tarpais tarp krumplių, tardami „sausis“, „vasaris“, „kovas“ ir t.t. Kai krumpliai baigiasi, einame iš naujo. Jeigu tariant mėnesio pavadinimą atsiduriame ant krumplio, tai mėnuo turi 31 dieną; jei tarp – 30 dienų (žinoma, išskyrus vasarį).
Kadangi krumpliai keturi, tarpai 3, tai skaičiuodami kas septyni atsidursime ant pirmojo krumplio: tai bus, kai tarsime 1, 8, 15, 22, 29, 36, 42, 49. Suskaičiavę iki 55, atsidursime prieš paskutinį krumplį – šeštoje pozicijoje, atitinkančioje šeštadienį.

! Į 55 dienas telpa pilnos 7 savaitės, taigi po 49 dienų vėl bus sekmadienis. Liko 6 dienos, ir pirma iš jų bus pirmadienis, antra – antradienis, ..., šešta – šeštadienis.

!! 56 dienos – tai aštuonios savaitės. Todėl 56-ta diena taip pat bus sekmadienis, o 55-ta diena – šeštadienis.

Pastaba. Iš tikrųjų abu sprendimai remiasi dalyba su liekana. Pirmame sprendime dalydami 55 iš 7, gauname dalmenį 7 ir liekaną 6, t.y. $55 = 7 \cdot 7 + 6$. Kitame sprendime remiamės lygybe $55 = 8 \cdot 7 - 1$.

M10. Dvi krepšinio komandos žaidžia rungtynių seriją. Laimi ta komanda, kuri pirma iškovoja keturias pergales. Lygiųjų nėra. Koks gali būti didžiausias skaičius rungtynių, po kurių garantuotai paaiškės nugalėtojas?
A 8 **(B)** 7 **C** 6 **D** 5 **E** 4

? Aišku, kad ketverių rungtynių mažai (pavyzdžiui, rezultatas gali būti 2 : 2). Mažai ir penkerių rungtynių (pavyzdžiui, 3 : 2), ir 6 rungtynių (pavyzdžiui, 3 : 3). O štai septynerių rungtynių – gana: bent viena komanda turės jau 4 pergales.

! Trijų pergalių neužtenka nei vienai komandai, todėl šešerių rungtynių neužtenka (kai santykis 3 : 3). Septynerių rungtynių gana – bent viena komanda turės 4 pergales. (Vadinamasis Dirichlė principas: iš tikrųjų, jei kiekviena komanda turėtų $\leqslant 3$ pergales, tai rungtynių būtų $\leqslant 6$, – prieštara.) Vadinasi, atsakymas – 7 rungtynės.

M11. Jonukas turėjo prie tam tikro skaičiaus pridėti 27, bet vietoj to atėmė 27. Koks yra teisingo rezultato ir Jonuko rezultato skirtumas?

A 27 **B** 0 Ⓒ 54 **D** 100 **E** 3

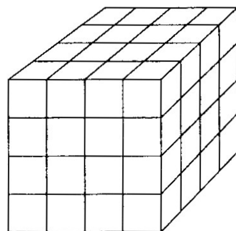
? Imkime, pavyzdžiui, skaičių 30. Jonukas turėjo gauti $30 + 27 = 57$, o gavo $30 - 27 = 3$. Teisingo rezultato ir Jonuko rezultato skirtumas $57 - 3 = 54$.

! Jonukas turėjo padidinti skaičių 27, bet iš tikrųjų sumažino jį 27. Teisingas rezultatas sumažėjo $27 + 27 = 54$.

!! Sakykime, skaičius buvo x. Jonukas turėjo gauti $x + 27$, bet gavo $x - 27$. Šių skaičių skirtumas yra $(x+27) - (x-27) = 54$, taigi nepriklauso nuo x (nuo to, koks buvo pradinis skaičius).

M12. Auksakalys nusprendė auksinį kubą, kurio kraštinė lygi 4 cm, padalyti į kubelius, kurių kraštinė lygi 1 cm. Kiek jis gaus mažųjų kubelių?

Ⓐ 64 **B** 48 **C** 32 **D** 16 **E** 12



? Didžiojo kubo tūris yra $4 \times 4 \times 4 = 64$ cm^3, o kubelio tūris $1 \times 1 \times 1 = 1$ cm^3. Todėl kubas bus padalytas į 64 kubelius.

! Padalykime kubą į keturis vienetinio aukščio sluoksnius. Vienas sluoksnis yra „kvadratas“ 4×4, todėl bus padalytas į 16 kubelių, o visas kubas bus padalytas į $4 \times 16 = 64$ kubelius.

M13. Pilnas pieno bidonas sveria 25 kg, o pripiltas iki pusės – 13 kg. Kiek sveria tuščias bidonas?

A 2 kg **B** 500 g **C** 1500 g Ⓓ 1 kg **E** 2500 g

? Tikrinkime atsakymą A. Jeigu tuščias bidonas svertų 2 kg, tai pienas pilname bidone svertų $25 - 2 = 23$ kg, pusė bidono pieno svertų 11,5 kg, pripiltas iki pusės bidonas su pienu svertų $11,5 + 2 = 13,5$ kg, o taip nėra. Jeigu pagal atsakymą B bidonas svertų 500 g, tai pienas pilname bidone svertų 12250 g, tas pienas su bidonu svertų $12250+500 = 12750$ g, o taip nėra. Jeigu bidonas svertų 1500 g, tai pienas jame svertų $25000 - 1500 = 23500$ g, pusė to pieno svertų 11750 g, o su bidonu – 13750 g, o taip nėra. Sakykime, kad bidonas sveria 1 kg, tada bidonas pieno svertų $25 - 1 = 24$ kg, pusė bidono pieno svertų 12 kg, o tas pienas su bidonu svertų 13 kg. Vadinasi, tinka atsakymas D.

! Kadangi pilnas bidonas su pienu už iki pusės pripiltą bidoną sveria $25 - 13 = 12$ kg daugiau, tai pusė bidono pieno sveria 12 kg. Kadangi iki pusės pieno pripiltas bidonas ir bidonas sveria 13 kg, tai bidonas sveria $13 - 12 = 1$ kg.

!! Jeigu bidonas sveria x kg, tai bidonas pieno sveria $25 - x$ kg, o pusė bidono pieno sveria $13 - x$ kg. Vadinasi, $25 - x = 2(13 - x)$, $x = 1$.

M14. Močiutė šaldytuve laiko stiklainį, kuriame yra 650 g uogienės. Anūkėlis Tomukas kiekvieną dieną iš jo suvalgo po 5 šaukštelius uogienės. Šaukštelyje telpa 6 g uogienės. Kiek uogienės liks stiklainyje po 20 dienų?

Ⓐ 50 g **B** 530 g **C** 550 g **D** 1250 g **E** Stiklainis bus tuščias

! Tomukas kasdien suvalgo po $5 \cdot 6 = 30$ g uogienės, todėl per 20 dienų jis suvalgys $30 \cdot 20 = 600$ g uogienės. Taigi stiklainyje liks $650 - 600 = 50$ g uogienės.

M15. Kiekvienas iš vienuolikos kengūros vaikų turi vienuolika vaikų, iš kurių kiekvienas vėl turi vienuolika vaikų. Kiek proanūkių turi kengūra?

A 111 **B** 121 **C** 11211 Ⓓ 1331 **E** 12321

! Kengūra turi $11 \cdot 11 = 121$ anūkų. Kadangi kiekvienas jų turi 11 vaikų, tai kengūra turi $121 \cdot 11 = 1331$ proanūkių.

M16. Koks yra mažiausias galimas vaikų skaičius Kondratų šeimoje, jeigu kiekvienas vaikas turi mažiausiai vieną brolį ir mažiausiai vieną seserį?

A 1 **B** 2 **C** 3 Ⓓ 4 **E** 5

? Atsakymas A netinka – vaikas neturėtų nei brolio, nei sesers. Atsakymas B taip pat netinka: bet kuris vaikas turi turėti ir brolį, ir seserį, taigi vaikų turi būti 3 arba daugiau. Netinka ir atsakymas C. Iš tikrųjų, sakykime, kad yra 3 vaikai. Jeigu berniukų nėra, tai bet kuri sesuo neturėtų brolio. Jeigu berniukas vienas, tai jo seserys dvi, ir jis neturi brolio. Jeigu berniukai du, tai sesuo viena, ir ji neturi sesers. Jeigu berniukų trys, tai nė vienas jų neturi sesers. O štai atsakymas D tinka: jeigu yra du berniukai ir dvi mergaitės, tai uždavinio sąlygos išpildytos.

! Kadangi kiekvienas vaikas turi ir brolį, ir seserį, tai vaikai negali būti vienos lyties. Be to, kiekvienos lyties vaikų turi būti ne mažiau kaip du – kitaip tas vienintelis savo lyties vaikas neturėtų savo lyties brolio-sesers. O štai atsakymas „keturi vaikai“ tinka: jeigu yra du berniukai ir dvi mergaitės, tai uždavinio sąlygos išpildytos. Tada atsakymas E neteisingas. Užtenka keturių, o ne penkių vaikų.

M17. Petriukas atverčia knygą ir mato, kad kairiojo ir dešiniojo puslapių numerių suma lygi 21. Kam yra lygi tų dviejų numerių sandauga?

A 121 **B** 100 **C** 420 Ⓓ 110 **E** 462

? Atverstos knygos dešinysis puslapis visada nelyginis, o kairysis – lyginis, vienetu mažesnis (todėl tokių puslapių suma negali būti, sakysime, 23). Dalijame 21 iš 2 (su liekana). Gauname 10. Matome, kad puslapių 10 ir 11 suma 21, o sandauga $10 \cdot 11 = 110$. Taigi teisingas atsakymas D.

! Jeigu dešinysis puslapis būtų 13 ar daugiau, tai puslapių suma būtų mažiausiai 25, – netinka. Jeigu dešinysis puslapis būtų 9 ar mažiau, tai suma būtų daugiausiai 17, – netinka. Vadinasi, tikti gali tik dešinysis puslapis 11. Tada kairiojo 10-to ir dešiniojo 11-to puslapių numerių suma yra 21, o jų numerių sandauga lygi 110.

!! Pažymėkime kairiojo puslapio numerį x, tada dešiniojo numeris $x+1$. Pagal sąlygą $x+x+1=21$, t.y. $x=10$. Atsakymas 10 tinka – tikrai kairysis puslapis lyginis.

M18. Tėvas Virgilijus globoja 143 vaikus. Kasdien pusryčiams kiekvienas vaikas gauna pusę litro pieno. Vienos karvės pieno užtenka 40 vaikų. Kiek mažiausiai karvių turi laikyti Tėvas Virgilijus?

A 2 **B** 3 **(C)** 4 **D** 5 **E** 6

? Jeigu karvės būtų 2, tai jų pieno užtektų 80 vaikų. Jeigu karvės būtų 3, tai jų pieno užtektų 120 vaikų. Jeigu karvės būtų 4, jų pieno užtektų 160 vaikų. Vadinasi, teisingas atsakymas C.

! Jeigu karvių būtų 3 arba mažiau, tai pieno užtektų ne daugiau kaip 120 vaikų. Jeigu karvės būtų 4 arba daugiau, tai pieno tikrai užtektų 160 vaikų. Vadinasi, Tėvui Virgilijui užtenka laikyti 4 karves.

!! Dalijame 143 iš 40 su liekana. Gauname dalmenį 3 ir liekaną 23 – tai reiškia, kad trijų karvių pienas bus sunaudotas visiškai, bet jo neužteks 23 vaikams. Vadinasi, karvių turi būti mažiausiai 4.

!!! Galima sudaryti ir nelygybę. Pažymėkime karvių skaičių x. Pagal sąlygą $x \cdot 40 \geqslant 143$. Iš čia $x \geqslant 4$ (x sveikas). Vadinasi, mažiausias sprendinys yra $x=4$.

M19. Iš kvadratinių $10\,\text{cm} \times 10\,\text{cm}$ medžiagos skiaučių kengūrėlė nori susiūti stačiakampį 1,5 m ilgio ir 1 m pločio užtiesalą. Visur, kur sueina keturi kvadratėliai, ji nori prisiūti puošnią sagutę. Kiek sagučių jai prireiks?

A 150 **B** 104 **(C)** 126 **D** 140 **E** 135

? Prie kiekvienos iš viršutinio krašto skiaučių, išskyrus dešiniausią, apatiniame dešiniajame kampe reikės prisiūti po sagutę – 14 sagučių. Todėl sagučių skaičius turi dalytis iš 2. Prie kiekvienos kairiojo krašto skiautės, išskyrus apatinę, reikės prisiūti po sagutę – 9 sagutes. Todėl sagučių skaičius turi dalytis iš 9. Bet iš 9 dalijasi tik skaičiai C ir E (jų skaitmenų suma dalijasi iš 9), o iš šių dviejų iš 2 dalijasi tik C (paskutinis skaitmuo lyginis).

! Į užtiesalo ilgį telpa 15 skiaučių, į plotį – 10 skiaučių. Todėl sagučių bus 14 eilių po 9 sagutes, $14 \cdot 9 = 126$.

M20. Pinokio medinės nosies ilgis yra 3 cm. Kiekvieną kartą, kai Pinokis sumeluoja, jo nosies ilgis padvigubėja. Koks bus jo nosies ilgis šešis kartus sumelavus?

(A) 192 cm **B** 67 cm **C** 96 cm **D** 18 cm **E** 384 cm

? Atspėti atsakymą čia sunkoka – reikia skaičiuoti. Juo labiau, kad po penkių sumelavimų nosies ilgis bus 96 cm, o po 7 – 384 cm.

! Šešis kartus sumelavus, Pinokio nosis padidės $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$ kartus. Taigi ji bus lygi $3 \cdot 64 = 192$ cm.

M21. Kieme yra po tiek pat kiaulių, ančių ir vištų. Visos jos turi 144 kojas. Kiek ančių yra kieme?

Ⓐ 18 **B** 21 **C** 35 **D** 42 **E** 43

? Pradėkime nuo A. Tada kieme yra 18 kiaulių, 18 ančių ir 18 vištų. Visos jos turi $18 \cdot 4 + 18 \cdot 2 + 18 \cdot 2 = 144$ kojas, taigi teisingas atsakymas A.

! Sugrupuokime viską į trejetus taip, kad kiekviename trejete būtų kiaulė, antis ir višta. Toks trejetas turės $4 + 2 + 2 = 8$ kojas, taigi trejetų bus $144 : 8 = 18$. Vadinasi, 18 bus ir ančių.

!! Galima sudaryti ir lygtį. Sakykime, kad ančių yra x. Tada iš viso kojų bus $4x + 2x + 2x = 144$, $x = 18$.

M22. Iš skaičių 51, 52, 53, 54, 55 pasirinktas vienas, ir tarp jo skaitmenų įrašytas skaitmuo 0. Koks naujojo ir iš pradžių pasirinkto skaičiaus skirtumas?

A 500 **B** 50 **C** 550 Ⓓ 450

E Skirtumas priklauso nuo to, kurį skaičių pasirinkome

? Pradėkime nuo skaičiaus 51. Tada $501 - 51 = 450$. Vadinasi, atsakymas D tinka. Kadangi tikti gali tik vienas atsakymas, tai teisingas atsakymas ir yra D.

! Sakykime, pasirinktasis skaičius $\overline{5a}$. Tada naujasis skaičius $\overline{50a}$. Jų skirtumas lygus $\overline{50a} - \overline{5a} = 500 - 50 = 450$ ir nepriklauso nuo pasirinkto skaičiaus. Taigi teisingas tik atsakymas D.

!! Pasirinkto skaičiaus antrą skaitmenį pažymėkime x. Tada pasirinktas skaičius lygus $50 + x$, o naujasis – lygus $500 + x$. Jų skirtumas lygus $500 - 50 = 450$ ir nepriklauso nuo x.

M23. Jeigu močiutė kiekvienam iš savo anūkų mėgintų duoti po 10 saldainių, tai vienam iš jų neliktų nieko. Bet jeigu močiutė duotų po 8 saldainius, tai jai dar liktų 6 saldainiai. Kiek anūkų turi močiutė?

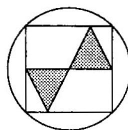
A 4 **B** 6 Ⓒ 8 **D** 10 **E** 12

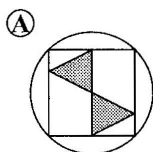
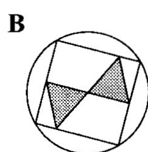
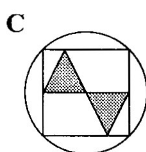
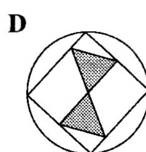
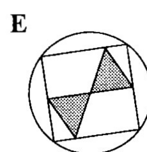
? Sakykime, kad anūkai keturi. Tada trys anūkai gautų po 10 saldainių, taigi saldainių yra 30. Duodant juos po 8, saldainių neužtektų. Jeigu anūkų būtų 6, saldainių būtų 50, ir duodant kiekvienam po 8, liktų $50 - 6 \cdot 8 = 2$ saldainiai. Jeigu anūkų būtų 8, tai saldainių būtų 70, ir duodant po 8, saldainių liktų $70 - 8 \cdot 8 = 6$. Vadinasi, teisingas turėtų būti atsakymas C.

! Sakykime, kad paskutinis anūkas neturi nieko, o kiti turi po 10 saldainių. Tada močiutė iš pirmųjų 3 anūkų pasiima po 2 saldainius, o kiti atiduoda po 2 saldainius paskutiniam. Kadangi paskutinis turi gauti 8 saldainius, tai jis po 2 saldainius gauna iš 4 anūkų. Vadinasi, anūkų iš viso yra $3 + 4 + 1 = 8$.

!! Sakykime, kad yra x anūkų. Tada saldainių yra $10(x - 1)$. Kadangi abiem atvejais kalbama apie visus saldainius, tai galima sudaryti lygtį: $10(x - 1) = 8x + 6$, t.y. $x = 8$.

M24. Šalia esančiame piešinyje pavaizduotas diskas, kuris sukasi pagal laikrodžio rodyklę ir per valandą padaro vieną pilną apsisukimą. 12^{00} valandą diskas užima piešinyje pavaizduotą padėtį. Kokia bus disko padėtis 14^{15} valandą?

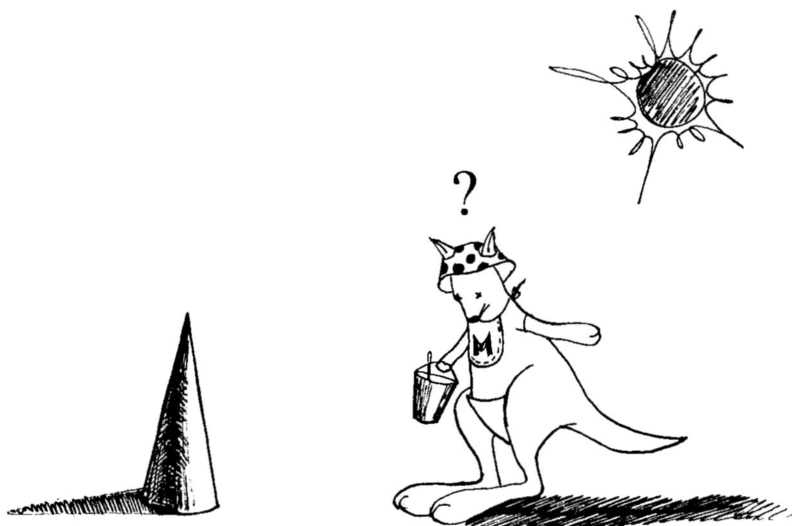


Ⓐ  B  C  D  E 

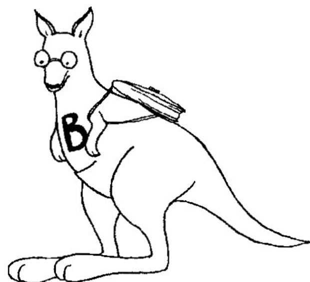
? Po 15 minučių visos trys piešinyje pavaizduotos horizontaliosios atkarpos taps vertikaliomis, po pusvalandžio – vėl horizontaliomis, po 1 h vėl horizontaliomis, po 2 h vėl horizontaliomis, o po 2 h 15 min vėl vertikaliomis. Tai vaizduoja piešinys A.

! Kadangi po 2 valandų diskas vėl užims pradinę padėtį, tai užtenka nustatyti, kokią padėtį jis užims po 15 minučių. Kadangi per 60 minučių diskas padaro pilną apsisukimą, tai per 15 minučių jis padarys ketvirtadalį apsisukimo. Tai reiškia, kad piešinyje pavaizduota horizontalioji atkarpa užims vertikalią padėtį, ir disko padėtis pavaizduota piešinyje A.

!! Įsivaizduokime, kad diskas sutapdintas su laikrodžio ciferblatu ir laikrodžio minutinė rodyklė nustatyta horizontaliai („15 minučių po"). Po 2 valandų ji vėl užims tą pačią padėtį (minutinė rodyklė per valandą padaro pilną apsisukimą), o dar po 15 minučių ji rodys „30 minučių po", t.y. rodys žemyn. Tokia padėtis pavaizduota piešinyje A.



BIČIULIS (V ir VI klasės)



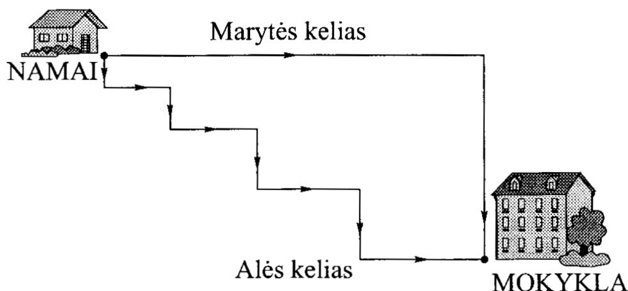
B1. $1999 - 999 + 99 - 9 =$

A 1900 (**B**) 1090 **C** 1000 **D** 1990 **E** 1009

? Skaičiuokime apytiksliai, šimtais. Tada turime gauti apie $20 - 10 + 1 = 11$ šimtų. Arčiausiai šio skaičiaus yra 1090, taigi atsakymas būtų B.

! Grupuojame dėmenis: $(1999 - 999) + (99 - 9) = 1000 + 90 = 1090$.

B2. Alė ir jos sesuo Marytė iš namų į mokyklą eina skirtingais keliais. Kuris kelias ilgesnis?



A Alės kelias **B** Marytės kelias **C** Tai priklauso nuo atstumo iki mokyklos
(**D**) Abiejų kelių ilgis vienodas **E** Nustatyti neįmanoma

? Atspėti ką nors čia sunku – reikia idėjos.

! Kadangi Alė ir į dešinę, ir į apačią eina tiek pat, kiek Marytė, tai jų keliai lygūs, ir atsakymas nepriklauso nuo atstumo iki mokyklos. Vadinasi, teisingas atsakymas D.

B3. Ketvirtoji dalis pusės padvigubinto skaičiaus 32 lygi:

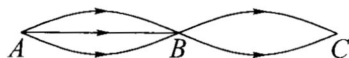
A 4 (**B**) 8 **C** 16 **D** 32 **E** 64

? Geriau nespėlioti, o suskaičiuoti.

! Padvigubintas skaičius 32 yra lygus 64. Jo pusė yra 32, o šio skaičiaus ketvirtoji dalis yra 8. Taigi teisingas atsakymas B.

!! Pusė padvigubinto skaičiaus ir yra pats tas skaičius 32, o ketvirtoji jo dalis yra 8.

B4. Kiek kelių veda iš vietovės A į vietovę C?
A 5 **B** 3 **C** 5 **(D)** 6 **E** 9



? Iš karto matyti, kad kelių daugiau kaip 3, bet geriau nespėlioti. Susivokti, kad kelių skaičius turi dalytis iš 2 ir iš 3, sunkoka. Tada gautume atsakymą D.

! Paprasta surašyti visus kelius. Pažymėkime kelius AB raidėmis a (aukštutinis), v (vidurinis), z (žemutinis), BC raidėmis a ir z. Tada pagal abėcėlę surašome visus kelius:

az av
vz vv
zz zv

Gavome 6 kelius.

!! Lentelėje eilučių yra 3 – tiek, kiek raidžių a, v, z. Stulpelių yra 2 – su antra raide z arba v. Iš viso lentelėje yra $3 \times 2 = 6$ „žodžiai". Toks skaičiavimo būdas vadinamas kombinatorikos daugybos taisykle: jei pirmą darbą (pasirinkti kelią, pirmą raidę) galima atlikti 3 būdais, o antrą darbą – 2 būdais, tai abu darbus galima atlikti 3×2 būdais.

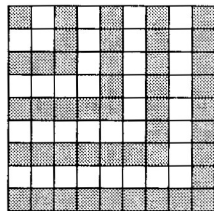
B5. Kiek kartų minutinė laikrodžio rodyklė juda greičiau už valandinę rodyklę?
A 6 **(B)** 12 **C** 9 **D** 10 **E** 15

? Čia jau nepaspėliosi – teks skaičiuoti.

! Kadangi minutinė rodyklė pilnai apsisuka per 1 valandą, o valandinė – per 12 valandų, tai minutinė rodyklė juda 12 kartų greičiau, ir teisingas atsakymas B.

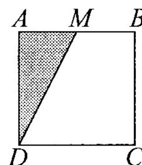
!! Valandinė rodyklė per 12 h padaro pilną apsisukimą, o minutinė 12 apsisukimų, taigi ji juda 12 kartų greičiau.

B6. Šalia esančiame piešinyje užtušuotas tam tikras skaičius mažųjų kvadratėlių, sudarančių didįjį kvadratą 9×9. Kam lygus užtušuotų kvadratėlių skaičiaus ir neužtušuotų kvadratėlių skaičiaus skirtumas?
A 0 **B** 1 **C** 5 **(D)** 9 **E** 10



! Nesunku suskaičiuoti neužtušuotus kvadratėlius „kampais": $3 + 7 + 11 + 15 = 36$. Todėl užtušuotų kvadratėlių yra $81 - 36 = 45$, o $45 - 36 = 9$, taigi teisingas atsakymas D.

!! Išmeskime iš kvadrato dešinėje apačioje kvadratėlį 2×2. Tada didžiausiame užtušuotame kampe liks tiek pat kvadratėlių, kiek ir neužtušuotame didžiausiame kampe, o 2×2 kvadrate užtušuotų kvadratėlių dviem daugiau: $3 - 1 = 2$. Lygiai taip pat 3 ir 4 (pagal didumą), 5 ir 6, 7 ir 8 kampai duoda skirtumą 2. Lieka vienas neužtušuotas kampinis kvadratėlis kairėje viršuje. Taigi užtušuotų kvadratėlių devyniais daugiau: $4 \cdot 2 + 1 = 9$.



B7. Keturkampis $ABCD$ yra kvadratas, o taškas M yra kraštinės AB vidurys. Užtušuotos dalies plotas lygus 9 cm^2. Kvadrato $ABCD$ plotas lygus:
A 18 cm^2 **B** 27 cm^2 **C** 32 cm^2 **(D)** 36 cm^2 **E** 45 cm^2

? Iš akies matome, kad kvadrato plotas maždaug 4 kartus didesnis. Renkamės atsakymą D.

! Jeigu per tašką M išvestume vertikalią liniją, tai kvadratas būtų padalytas pusiau į du vienodus stačiakampius. Vieną iš stačiakampių įstrižainė MD dalija į du lygius trikampius, taigi užtušuota dalis sudaro ketvirtadalį kvadrato ploto. Vadinasi, kvadrato plotas lygus $9 \times 4 = 36$ cm^2, ir teisingas atsakymas D.

!! Sakykime, kad kvadrato kraštinė lygi x. Tada trikampio ADM plotas $\frac{1}{2} \cdot AM \cdot AD = 9$, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}x \cdot x = 9$, $x^2 = 36$. Tai ir yra kvadrato plotas.

B8. Kino seansas prasidėjo 13^{47}, o baigėsi 16^{18}. Kiek laiko truko seansas?
A 185 min **(B)** 151 min **C** 91 min **D** 149 min **E** 209 min

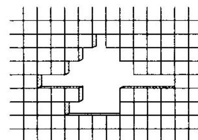
? Kadangi seansas prasidėjo prieš 14 val., o baigėsi po 16 val., tai jis truko daugiau kaip 2 val. Po 3 valandų nuo 13^{47} bus 16^{47}, taigi seansas truko mažiau kaip tris valandas. Vadinasi, žiūrint į atsakymus aišku, kad jis galėjo trukti 151 minutę arba 149 minutes. Bet minučių skaičius turi baigtis vienetu: $8 - 7 = 1$, todėl renkamės atsakymą B.

! Skaičiuojame: $16^{18} - 13^{47} = 3^{18} - 0^{47} = 2^{78} - 0^{47} = 2^{31} = 120 + 31 = 151$ minutė, ir teisingas tik atsakymas B.

B9. Vienas iš gimtadienio vakarėlio dalyvių sužinojo, kad jokie du asmenys iš esančių tame vakarėlyje nėra gimę tą patį mėnesį. Kiek daugiausiai asmenų galėjo dalyvauti vakarėlyje?
A 11 **(B)** 12 **C** 13 **D** 24 **E** 344

! Vakarėlyje asmenų dalyvavo ne daugiau, negu yra mėnesių, taigi galėjo dalyvauti 11 arba 12 asmenų, o daugiausiai galėjo dalyvauti 12 asmenų. Taigi tinka tik atsakymas B.

B10. Kiek plytų išimta iš sienos?
(A) 26 **B** 32 **C** 36 **D** 40 **E** 42



? Plytos išimtos iš 6 eilių. Pasvarstykime, kiek vidutiniškai plytų išimta iš kiekvienos eilės. Pati ilgiausia eilė ir pati trumpiausia eilė „nebūdingos“. Tarp likusių eilių ilgiausia eilė 5 plytos, trumpiausia 3 plytos. Taigi vidutiniškai kiekvienoje eilėje išimta apie 4 plytas, o šešiose eilėse – apie $6 \cdot 4 = 24$. Artimiausias šiam skaičiui atsakymas 26, taigi renkamės atsakymą A.

! Viršutinėje eilėje išimta 1 plyta, antroje – 3 plytos, trečioje dar po vieną į kairę ir į dešinę – 5 plytos, ketvirtoje į kairę dar 2, į dešinę dar 3 plytos – 10 plytų. Šeštoje eilėje išimtos

4 plytos, penktoje viena mažiau – 3 plytos. Iš viso išimta $1 + 3 + 5 + 10 + 3 + 4 = 26$ plytos. Taigi teisingas atsakymas A.

B11. Jonukas atverčia knygą ir mato, kad kairiojo puslapio ir dešiniojo puslapio numerių suma lygi 25. Kam lygi tų dviejų skaičių sandauga?

A 169 **B** 144 **C** 150 **(D)** 156 **E** 1998

? Kairiojo ir dešiniojo puslapio numeriai skiriasi nedaug – tik vienetu, o padaliję pusiau gauname 12,5. Panašu, kad tai puslapiai 12 ir 13 (jų suma tikrai lygi 25). Sandauga $15 \cdot 13 = 156$, taigi renkamės atsakymą D.

! Kadangi dviejų iš eilės einančių skaičių suma baigiasi skaitmeniu 5, tai tie skaičiai gali baigtis tik 2 ir 3 arba 7 ir 8. Abiem atvejais sandauga baigsis skaitmeniu 6. Iš atsakymuose pateiktų skaičių skaitmeniu 6 baigiasi tik pateiktas atsakyme D.

!! Kairysis puslapis knygose visada lyginis, o dešinysis vienetu didesnis nelyginis. Jeigu kairysis puslapis 10 arba mažiau, tai dešinysis 11 arba mažiau, ir suma per maža. Jeigu kairysis puslapis 14 arba daugiau, tai dešinysis 15 arba daugiau, ir suma per didelė. Vadinasi, kairiojo puslapio numeris yra 12, dešiniojo 13. Tada jų suma tikrai 25, o sandauga lygi 156, taigi tinka tik atsakymas D.

!!! Kairiojo puslapio numerį pažymėkime x, tada dešinysis $x + 1$. Pagal sąlygą $x + x + 1 = 25$, $x = 12$. Todėl kairysis puslapis 12, o dešinysis 13. Jų sandauga lygi 156.

B12. Vienas kengūros šuolis lygus 5 m. Kiek šuolių jai prireiks įveikti nuotolį 5000 m + 5000 dm + 5000 cm + 5000 mm?

A 1000 **B** 1100 **C** 1110 **(D)** 1111 **E** 5555

? Paskutinis dėmuo lygus 500 cm = 5 m, ir jam įveikti kengūrai reikės 1 šuolio. Kiti dėmenys vis didėja dešimt kartų, todėl šuolių skaičius baigsis 1. Renkamės atsakymą D.

! Pirmam sumos dėmeniui įveikti kengūrai reikia 1000 šuolių. Kiekvienas kitas dėmuo yra 10 kartų mažesnis, todėl kengūrai teks padaryti $1000 + 100 + 10 + 1 = 1111$ šuolių. Taigi teisingas tik atsakymas D.

B13. 1 m ilgio lazdos ilgis nuotraukoje yra 2 cm, o tvoros aukštis toje pačioje nuotraukoje lygus 4,5 cm. Tikrasis tvoros aukštis centimetrais yra lygus:

A 450 **(B)** 225 **C** 45 **D** 22,5 **E** 4,5

? Kadangi tvoros aukštis didesnis už lazdos ilgį šiek tiek daugiau negu du kartus, tai tvoros aukštis bus šiek tiek didesnis už 2 metrus. Tinka atsakymas B.

! Nuotraukoje lazda sumažėjo $100 : 2 = 50$ kartų. Vadinasi, tikrasis tvoros aukštis 50 kartų didesnis, negu nuotraukoje: $4,5 \cdot 50 = 45 \cdot 5 = 225$ cm, ir teisingas tik atsakymas B.

!! Pažymėkime tvoros aukštį x cm. Kadangi ilgiai tikrovėje ir nuotraukoje proporcingi, tai $x : 4,5 = 100 : 2$, $2x = 450$, $x = 225$.

B14. Kam lygi suma dviejų skaitmenų, kurie pakeisti žvaigždutėmis šalia pavaizduotoje daugyboje?

$$\begin{array}{r} 6*3 \\ \times \quad 5 \\ \hline 346* \end{array}$$

A 6 **B** 8 **C** 10 **D** 12 **(E)** 14

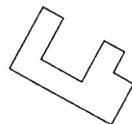
? Lengva nustatyti trečiosios eilutės skaitmenį – tai 5, nes $3 \cdot 5$ baigiasi skaitmeniu 5. Atspėkime pirmos eilutės skaitmenį. Imkime „vidurį“ – skaitmenį 5 – per mažai. Vėl imkime „vidurį“ tarp 5 ir 9 – skaitmenį 7. Daugindami gauname vėl per mažai. Imame „vidurį“ 8 – neišeina. Vadinasi, reikia imti 9, o tada viskas išeina gerai. Sumą $5 + 9 = 14$ duoda atsakymas E.

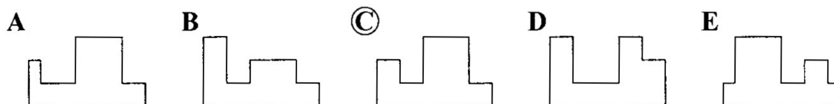
! Kadangi sandaugos paskutinis skaitmuo 5, tai sandauga lygi 3465. Padaliję iš 5, randame, kad pirmoje eilutėje turi stovėti skaičius $3465 : 5 = 693$. Vadinasi, kitas užšifruotas skaitmuo 9, ir abiejų žvaigždutėmis pakeistų skaitmenų suma lygi $5 + 9 = 14$.

!! Sandaugos paskutinis skaitmuo 5. Pirmosios eilutės užšifruotas skaitmuo nelyginis – kitaip trečioje eilutėje gautume 1, o ne 6. Be to, jis didesnis už 7 – kitaip daugindami gautume per mažai. Vadinasi, tas skaitmuo yra 9.

!!! Pažymėję pirmos eilutės užšifruotą skaitmenį x, turime lygtį: $(603 + 10x) \cdot 5 = 3465$, $603 + 10x = 693$, $10x = 90$, $x = 9$.

B15. Kuri iš apačioje esančių figūrų sudarys stačiakampį su figūra, pavaizduota šalia?





? Figūra A netinka – jos kairysis „dantis“ per plonas. Netinka ir figūra B – jos platusis dantis turi būti aukštesnis už siaurąjį. Panašu, kad figūra C galėtų tikti. Renkamės atsakymą C.

! Matome, kad ta figūra iš atsakymų, kuri sudarys stačiakampį su pavaizduota šalia figūra, turi turėti platų „dantį“ ir kiek trumpesnį kitą dantį. Tokios figūros yra A, C, E. Bet figūrai E reikia tridantės poros, o figūros A – per siauras kairysis dantis. Taigi lieka figūra C. Gerai įsižiūrėję, matome, kad figūra C tikrai tinka.

B16. Šuo yra 9 kartus sunkesnis už katiną, pelė yra 20 kartų lengvesnė už katiną, o ropė yra 6 kartus sunkesnė už pelę. Kiek kartų šuo sunkesnis už ropę?

(A) 30 **B** 27 **C** 1080 **D** 15 **E** Šuo lengvesnis už ropę

? Sakykime, kad katinas sveria 2 kg, tada šuo sveria 18 kg, pelė sveria 0,1 kg, ropė sveria 0,6 kg. Todėl šuo $18 : 0,6 = 180 : 6 = 30$ kartų sunkesnis už ropę. Pasirenkame atsakymą A.

! Ropė sveria tiek, kiek 9 pelės, katinas – tiek, kiek 20 pelių, šuo sveria tiek, kiek 180 pelių. Todėl šuo už ropę sunkesnis 180 : 6 = 30 kartų.

!! Pelė yra lengviausia, todėl būtent jos masę patogu pasižymėti x. Tada ropė sveria $6x$, katinas sveria $20x$, šuo $180x$. Taigi šuo sunkesnis už ropę $180x : (6x) = 30$ kartų.

Pastaba. Iš tikrųjų visi trys sprendimai beveik niekuo nesiskiria. Pirmajame sprendime („spėjime") mus trikdo vienintelis dalykas – ar galima laikyti, kad katinas sveria 2 kg? Ar tai neturi įtakos sprendimui? Jaučiame, kad neturi, bet vis dėlto – neramu.
Šis sunkumas apeinamas taip. Jeigu katinas sveria 20 tararabumbijų (nejaugi nežinote tokio vieneto?), tai pelė sveria 1 tararabumbiją, ropė sveria 6 tararabumbijas, o šuo sveria 180 tararabumbijų. Todėl šuo sunkesnis už ropę 180 : 6 = 30 kartų.
O kodėl ėmėme 20 tararabumbijų? Nagi todėl, kad 20 labai maloniai dalijasi iš 20. O kas gi pagaliau ta tararabumbija? Tiek jau to – išduosime paslaptį: tai $\frac{1}{20}$ katino. Stop – atsiprašome: tai $\frac{1}{20}$ katino masės dalis. Beje, tai ir pelės masė. O taip pat ir tas mūsų x.

B17. Žr. M19 uždavinio sprendimą.

B18. Pirmame inde buvo 26 litrai vandens, o antrame – 7 litrai vandens. Į kiekvieną indą buvo dar įpilta po tiek pat vandens, ir tada antrame inde vandens pasidarė 3 kartus mažiau negu pirmame. Kiek litrų vandens buvo dar įpilta į kiekvieną iš indų?
Ⓐ 2,5 **B** 5 **C** 7,5 **D** 10 **E** 15

? Tikriname atsakymą A. Įpylus po 2,5 litro vandens, pirmame inde bus 28,5 ℓ, antrame – 9,5 ℓ vandens, t.y. 28,5 : 9,5 = 57 : 19 = 3 kartus daugiau. Renkamės atsakymą A.

! Pradėkime nuo galo – įpylus dar vandens pirmame inde jo buvo 3 kartus daugiau negu antrame. Tada vandens tūrių skirtumas pasidarė 2 kartus didesnis už vandens antrame inde tūrį. Bet tas skirtumas nekito – į abu indus buvo pripilta dar po vienodai vandens, todėl jis visą laiką buvo lygus $26 - 7 = 19\,\ell$. Vadinasi, antrame inde po įpylimo buvo $19 : 2 = 9{,}5\,\ell$, taigi buvo įpilta $9{,}5 - 7 = 2{,}5\,\ell$ vandens.

!! Sakykime, kad buvo dar įpilta $x\,\ell$ vandens. Tada pirmame inde pasidarė $26 + x$, antrame $(7 + x)\,\ell$ vandens. Pagal sąlygą $26 + x = 3(7 + x)$, $2x = 5$, $x = 2{,}5$.

B19. Magiškojo kvadrato kiekvienoje eilutėje, kiekviename stulpelyje ir kiekvienoje įstrižainėje visų elementų suma yra ta pati. Šalia pavaizduotas magiškasis kvadratas, iš kurio du skaičiai pašalinti, o kiti trys uždengti kortelėmis su raidėmis P, Q ir R. Kam yra lygi kortelėmis P, Q ir R uždengtų skaičių suma?

16	3	P
R	10	
Q		4

A 30 **B** 41 **C** 14 Ⓓ 25 **E** Nustatyti neįmanoma

! Kadangi kvadratas magiškas, tai $16 + 3 + P = 16 + 10 + 4$, ir $P = 11$. Tada $11 + 10 + Q = 11 + 3 + 16$ ir $Q = 9$. Todėl $9 + R + 16 = 16 + 10 + 4$, ir $R = 5$. Vadinasi, $P + Q + R = 11 + 9 + 5 = 25$.

!! Kadangi skaičius 16 bendras ir įstrižainei, ir pirmai eilutei, ir pirmam stulpeliui, tai $P+3 = 10+4$ ir $Q+R = 10+4$. Sudėję šias lygybes, gauname $P+Q+R+3 = 28$, $P+Q+R = 25$.

Pastaba. O ar iš viso egzistuoja toks kvadratas? Jeigu ne, tai tada nežinotume nė kurį atsakymą pasirinkti. Taigi neblogai būtų įsitikinti, kad kvadratas egzistuoja ir nurodyti visus kvadrato skaičius. Randame antros eilutės pašalintą skaičių x: $x+5 = 16+4$, $x = 15$. Raskime trečios eilutės skaičių y: $y+4 = 5+16$, $y = 17$. Lengva patikrinti, kad kvadratas

16	3	11
5	10	15
9	17	4

tikrai magiškas.

B20. Jonas ir Adomas dėlioja kvadratus iš vienodų kvadratėlių. Adomas deda raudoną kvadratėlį. Tada Jonas aplink jį deda 8 žalius kvadratėlius ir vėl gauna kvadratą. Dabar Adomas deda 16 geltonų kvadratėlių aplink jau padėtus, susidaro trečias kvadratas, ir t.t. Kiek kvadratėlių teks Adomui pridėti sudarant penktą kvadratą?
Ⓐ 32 **B** 64 **C** 81 **D** 121 **E** 125

? Panašu, kad dedamų kvadratėlių skaičius vis didės aštuoniais, todėl Jonui iki ketvirto kvadrato reikės pridėti 24 kvadratėlius, o Adomui iki penkto kvadrato – 32 kvadratėlius. Renkamės atsakymą A.

! Raudono kvadratėlio kraštinė 1, o antro kvadrato kraštinė 3, trečio kvadrato kraštinė 5, ketvirto – 7, penkto – 9. Todėl Adomui teks padėti juostą, kurios plotas lygus penkto ir ketvirto plotų skirtumui, t.y. $9 \cdot 9 - 7 \cdot 7 = 32$ kvadratėlius.

!! Ketvirto kvadrato kraštinės ilgis 7, todėl reikės pridėti po 7 kvadratėlius prie kiekvienos iš 4 kraštinių plius dar 4 kvadratėlius į kampus – iš viso $7 \cdot 4 + 4 = 32$ kvadratėlius.

B21. Elena atėjo į Aušros gimtadienio vakarėlį 5 minutėmis anksčiau negu Stasys, bet 3 minutėmis vėliau negu Ilona. Ilona išėjo iš vakarėlio pirmoji. Ji išėjo 2 minutėmis anksčiau negu Stasys ir 5 minutėmis anksčiau negu Elena. Kiek minučių Elena vakarėlyje išbuvo ilgiau negu Stasys?
A 2 **B** 4 **C** 6 **Ⓓ** 8 **E** Stasys išbuvo ilgiau negu Elena

? Sakykime, kad Ilona atėjo į vakarėlį 19^{00}, tada Elena atėjo 19^{03}, o Stasys – 19^{08}. Tarkime, kad iš vakarėlio Ilona išėjo 22^{30}, tada Stasys išėjo 22^{32}, o Elena – 22^{35}. Stasys vakarėlyje buvo 3 h 24 min, o Elena buvo 3 h 32 min, taigi Elena buvo 8 minutėmis ilgiau. Renkamės atsakymą D.

! Skaičiuokime laiką minutėmis, pavyzdžiui, nuo vidudienio. Sakykime, kad Ilona atėjo į vakarėlį laiku x. Tada Elena atėjo laiku $x+3$, o Stasys – laiku $(x+3)+5 = x+8$. Tarkime, kad Ilona iš vakarėlio išėjo laiku y, tada Stasys išėjo laiku $y+2$, o Elena laiku

$y+5$. Tada Elena išbuvo vakarėlyje $y+5-(x+3)=y-x+2$ minučių, o Stasys $y+2-(x+8)=y-x-6$. Todėl Elena išbuvo ilgiau už Stasį $(y-x+2)-(y-x-6)=8$ minutėmis.

!! Elena išėjo iš vakarėlio 3 minutėmis vėliau už Stasį, o atėjo 5 minutėmis anksčiau už jį, todėl prabuvo vakarėlyje 8 minutėmis ilgiau.

B22. Jeigu šeši šimtai šeši šveicarai suvalgo šešis šimtus šešias dešreles, iš jų šešis šimtus su garstyčiomis ir šešias – be, tai kiek dešrelių be garstyčių reikia patiekti šeši šimtai šešiems tūkstančiams šeši šimtai šešiems šveicarams?

A 606 **B** 1000 **Ⓒ** 6006 **D** 606 606 **E** 600 600

? Suvalgomų dešrelių skaičius proporcingas valgytojų skaičiui. Tikriname atsakymą A. Proporcija $\frac{606}{606606}=\frac{6}{606}$ neteisinga: $\frac{1}{1001}\neq\frac{1}{101}$. Atsakymas B netinka, nes proporcija $\frac{1000}{606606}=\frac{6}{606}$ neteisinga: $606\cdot 1000\neq 6\cdot 606606$. O štai atsakymas C tinka: $\frac{6006}{606606}=\frac{6}{606}$, nes $\frac{1001}{101101}=\frac{1}{101}$, $1001\cdot 101=101101$. Taigi renkamės atsakymą C.

! 606 šveicarai suvalgo 600 dešrelių su garstyčiomis ir 6 be garstyčių. Todėl 606000 šveicarų suvalgo visko 1000 kartų daugiau, taigi 6000 dešrelių be garstyčių. Vadinasi, $606000+606$ šveicarai suvalgo $6000+6=6006$ dešreles be garstyčių.

!! Kadangi 606606 šveicarai yra $606606:606=1001$ kartą daugiau nei 606 šveicarai, tai jie ir suvalgys 1001 kartą daugiau dešrelių be garstyčių, t.y. $1001\cdot 6=6006$ dešreles.

!!! Vienam šveicarui tenka $\frac{6}{606}$ dešrelės be garstyčių, todėl 606606 šveicarams tenka $606606\cdot\frac{6}{606}=1001\cdot 6=6006$ dešrelės be garstyčių.

B23. Keturios voverės sugraužė 1999 riešutus ir, be to, kiekviena iš jų sugraužė ne mažiau kaip 100 riešutų. Pirma voverė sugraužė daugiau riešutų negu kiekviena iš likusių. Yra žinoma, kad antra ir trečia voverė kartu sugraužė 1265 riešutus. Kiek riešutų sugraužė pirma voverė?

A 598 **B** 271 **C** 629 **Ⓓ** 634 **E** Teisingas kitoks atsakymas

? Retas atvejis, kai paprasčiausia patikrinti visus atsakymus. Jei teisingas vienas iš atsakymų A, B ir C ir pirma voverė sugraužė ne daugiau kaip 629 riešutus, tai antra ir trečia voverės kartu sugraužė ne daugiau kaip $628+628=1256$ riešutus, – prieštara. O štai atsakymas D tinka. Tada pirma voverė sugraužė 634 riešutus. Sakykime, kad antra voverė sugraužė 632, o trečia – 633 riešutus, ketvirta – 100 riešutų. Tada visos uždavinio sąlygos išpildytos, ir renkamės atsakymą D.

! Kadangi antra ir trečia voverė sugraužė kartu 1265 riešutus, tai viena iš jų sugraužė ne mažiau kaip 633 riešutus, todėl pirma voverė sugraužė ne mažiau kaip 634 riešutus. Kita vertus, pirma ir ketvirta voverė sugraužė $1999-1265=734$ riešutus. Bet ketvirta voverė sugraužė ne mažiau kaip 100 riešutų, todėl pirmai voverei liko ne daugiau kaip 634 riešutai. Taigi pirma voverė sugraužė ir ne daugiau, ir ne mažiau kaip 634 riešutus, o tai reiškia, kad ji sugraužė lygiai 634 riešutus.

Dar reikia įsitikinti, kad visos uždavinio sąlygos išpildytos. Ketvirta voverė sugraužė 100 riešutų. Kadangi arba antra, arba trečia voverė sugraužė ne mažiau kaip 633 riešutus ir sugraužė mažiau už pirmą voverę, tai viena iš jų sugraužė lygiai 633 riešutus, o kita 632 riešutus. Dabar visos uždavinio sąlygos išpildytos, taigi teisingas atsakymas D.

!! Pirmas sprendimas pasidarys aiškesnis, jei viską užrašysime lygtimis ir nelygybėmis. Voverių sugraužtų riešutų kiekį atitinkamai pažymėkime x, y, z ir t. Tada

$$x + y + z + t = 1999,$$

$$x, y, z, t \geqslant 100,$$

$$x > y,\ x > z,\ x > t,$$

$$y + z = 1265.$$

Kadangi visi skaičiai natūralieji, tai $y \leqslant x - 1$, $z \leqslant x - 1$, ir $1265 = y + z \leqslant 2x - 2$, taigi $2x \geqslant 1267$, $x \geqslant 634$. Kita vertus, $x + t = 1999 - 1265 = 734$, $t \geqslant 100$, todėl $x \leqslant 634$. Vadinasi, $x = 634$. Tada $t = 734 - 634 = 100$. Bet $y \leqslant 633$, $z \leqslant 633$, $y + z = 1265$, o tai įmanoma tik kai $y = 633$, $z = 632$ arba kai $y = 632$, $z = 633$. Tada visos uždavinio sąlygos išpildytos, ir teisingas tik atsakymas D.

B24. Kai lyja, katinas tupi kambaryje arba rūsyje. Kai katinas kambaryje, tai pelė prieškambaryje, o sūris – šaldytuve. Kai sūris yra ant stalo, o katinas rūsyje, tai pelė yra kambaryje. Dabar lyja, o sūris ant stalo. Tada tikrai:

A Katinas kambaryje **B** Arba katinas kambaryje, arba pelė prieškambaryje
C Pelė prieškambaryje **(D)** Katinas rūsyje, o pelė kambaryje
E Tokia situacija neįmanoma

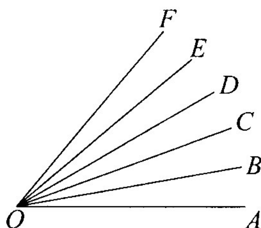
? Atsakymas A netinka iš viso – jei katinas būtų kambaryje, tai sūris būtų šaldytuve, – prieštara. Atsakymas C neteisingas, nes gali būti tokia situacija: katinas rūsyje, sūris ant stalo, pelė kambaryje, ir uždavinio sąlygos išpildytos. Tuo pačiu neteisingas ir teiginys E (situacija įmanoma), ir atsakymas B (nes dabar nei katinas kambaryje, nei pelė prieškambaryje). Vadinasi, lieka rinktis atsakymą D.

! Kadangi lyja, tai katinas galėtų būti kambaryje arba rūsyje. Bet kambaryje jis būti negali, nes tada sūris būtų šaldytuve. Vadinasi, katinas tupi rūsyje. Kadangi, be to, sūris ant stalo, tai pelė kambaryje. Ši situacija tenkina sąlygą.
Tada atsakymas A neteisingas (katino nėra kambaryje). Atsakymas B neteisingas (nei katinas kambaryje, nei pelė prieškambaryje). Atsakymas C neteisingas (pelės nėra prieškambaryje). Atsakymas D teisingas (katinas rūsyje, pelė kambaryje). Atsakymas E neteisingas (nagrinėjama situacija įmanoma).

B25. Kiek daugiausiai smailiųjų kampų gali sudaryti šeši plokštumos spinduliai, išeinantys iš to paties taško?

A 6 **B** 8 **C** 9 **D** 12 **(E)** 15

? Nubrėžkime 6 spindulius, pavyzdžiui, kas 10°. Tada visi 15 kampų *AOB*, *AOC*, *AOD*, *AOE*, *AOF*, *BOC*, *BOD*, *BOE*, *BOF*, *COD*, *COE*, *COF*, *DOE*, *DOF*, *EOF* smailieji. Renkamės atsakymą E.



! Kad gali būti 15 smailiųjų kampų, rodo pateiktas pavyzdys. Kiekviena spindulių pora sudaro du kampus, bet daugiausiai vienas iš jų tėra smailus (jei vienas kampas $< 90°$, tai kitas $> 360° - 90° = 270°$). O štai spindulių porų gali būti tik 15 – aukščiau jos visos išrašytos. Taigi ir smailiųjų kampų gali būti ne daugiau kaip 15.

B26. Skaičiaus 36 „produktas" lygus 18. Skaičiaus 325 „produktas" yra 30. Skaičiaus 45 „produktas" lygus 20, o skaičiaus 30 „produktas" lygus 0. Kam lygus skaičiaus 531 „produktas" ?

A 10 (**B**) 15 **C** 16 **D** 21 **E** 22

? Iš pavyzdžių spėjame, kad „produktas" yra skaičiaus skaitmenų sandauga. Todėl skaičiaus 531 „produktas" yra $5 \cdot 3 \cdot 1 = 15$. Renkamės atsakymą B.

! Spręsdami ieškome paprastos taisyklės, kuri paaiškintų, kas yra „produktas". Čia tokią taisyklę nustatyti nesunku: galima laikyti, kad „produktas"– tai skaitmenų sandauga. Tada tinka atsakymas B.
Bet apskritai kalbant skaičiaus 531 „produktą" galima pasirinkti bet kokį – formaliai tai niekam neprieštarautų. „Paprastumas" nėra matematikos sąvoka, – kas vienam paprasta, kitam gali būti visai ne.

Pastaba. Situacija čia primena sekos bendrojo nario nustatymą. Įsivaizduokime, kad aš rašau seką 1, 2, 3, 4, 5, ... ir siūlau ją pratęsti. Man sako, kad seka rašoma pagal taisyklę: kiekvienas sekos narys vienetu didesnis, ir seka bus 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ... O aš sakau, kad seką rašiau pagal tokią taisyklę: sužymiu balandžio mėnesio savo darbo dienas: 1, 2, 3, 4, 5, 8 (nes balandžio 6-ta – šeštadienis, 7-ta – sekmadienis), 9, ...
O štai mano draugas užsienyje tą seką pratęstų taip:

$$1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, \ldots$$

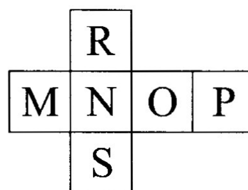
(mat pas juos balandžio 8 – nepriklausomybės šventė).
Beje, situacija nelengvesnė ir tada, kai sekos bendras narys užrašomas formule. Suprantama, jei imsime $a_n = n$, tai turėsime seką 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... Bet jei imsime, pavyzdžiui,

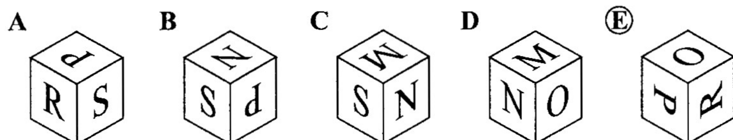
$$a_n = (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) + n,$$

tai seka bus

$$1, 2, 3, 4, 5, 126, 727, \ldots.$$

B27. Šalia pavaizduota išklotinė atitinka tik vieną iš penkių apačioje pavaizduotų kubelių. Kurį?





? Atsakymas A netinka, nes R ir S negali būti greta. Atsakymas B netinka, nes N ir P negali būti greta. Atsakymas D netinka, nes M ir O negali būti greta. Atsakymas C netinka dėl subtilesnės priežasties: raidės M ir N turi susieiti „šonais“, o ne „galvomis“. Lieka atsakymas E.

! Mums, griežtai kalbant, dar reikėtų įsitikinti, kad kubą E galima gauti. Paverskime jį taip, kad siena O būtų priekinė, P – dešinė, o R – viršutinė (nusipieškite). Dabar laikykime išklotinę „vertikaliai“ ir tegu siena O bus priekinė, lenkime P – ji taps dešiniąja, lenkime RNSM – N taps kairiąja, lenkime R – ji bus viršutinė ir pasisuks „galva“ į dešinę. Vadinasi, tikrai tinka lygiai vienas atsakymas.

Pastaba. Uždavinyje reikia „atspėti“, kad svarbu ir raidžių (ne tik sienų) tarpusavio padėtis.

B28. Į kiekvieną iš penkių puodelių yra įpilta arba kavos, arba kakavos, arba pieno. Iš viso kavos yra įpilta du kartus daugiau negu kakavos. Nėra trijų puodelių su tuo pačiu gėrimu. Kuriame puodelyje yra kakava?

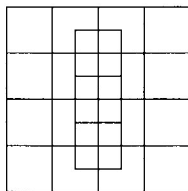


? Atsakymas A neteisingas – jei kakavos būtų 950 g, tai kadangi kavos yra daugiausiai dviejuose puodeliuose, tai jos būtų ne daugiau kaip $750 + 550 = 1300$ g, o tai jau nėra dukart daugiau nei kakavos. O štai atsakymas B tinka: sakykime, kad puodelyje B yra 750 g kakavos, puodeliuose A ir C kava, o puodeliuose D ir E pienas. Tada kavos yra 1500 g – dukart daugiau negu kakavos, ir uždavinio sąlygos išpildytos. Renkamės atsakymą B.

! Pasižiūrėkime, ar negalima sąlygos patenkinti įpylus kitaip. Kakavos negali būti 325 g, nes tada kavos būtų 650 g, o tai padaryti neįmanoma. Kakavos negali būti 475 g, nes tada kavos būtų 950 g, o tiek įpilti kavos galima tik vienu būdu – į pirmą puodelį, bet tada 3 puodeliuose būtų pienas, – prieštara. Kakavos negali būti 550 g, nes tada kavos būtų 1100 g, o tokios sumos surinkti neįmanoma. Kakavos negali būti ir dviejuose puodeliuose. Jei jos būtų 325 g + 475 g, tai kavos būtų 1600 g, o tokios sumos surinkti neįmanoma. Jei jos būtų 325 g + 550 g, tai kavos būtų 1750 g, o tai neįmanoma. Pagaliau, jei kakavos būtų 475 g + 550 g arba daugiau, tai kavos būtų daugiau kaip 2000 g, o tai neįmanoma.

!! Padauginkime visas mases iš 0,04. Gausime mases 38, 30, 22, 19, 13. Su tokiais skaičiais spręsti uždavinį žymiai maloniau.
Kadangi nėra trijų puodelių su tuo pačiu gėrimu, tai du gėrimai gali užimti tik 4 puodelius. Vadinasi, tikrai yra įpilta visų trijų gėrimų. Kavos yra dvigubai daugiau negu kakavos, todėl jos masė lyginė. Jei kavos yra 38, tai kakavos 19, bet tada 3 puodeliuose pienas. Kavos negali būti nei 30, nei 22, nes neįmanoma įpilti nei 15, nei 11 kakavos. Vadinasi, kava dviejuose puodeliuose. Bet jos tada negali būti $38 + 30$, nes tada nepavyks įpilti kakavos 34; kavos negali būti $30 + 22$, nes tada nepavyks įpilti kakavos 26, kavos negali būti $19 + 13$ – tada kakavos reikėtų 16. Todėl kavos yra $38 + 22$, tada kakavos yra 30, o į likusius 2 puodelius įpilta pieno.
Matome, kad šį uždavinį apsimoka spręsti spėjimo būdu.

B29. Kiek kvadratų slypi šioje figūroje?
A 46 **B** 47 Ⓒ 45 **D** 33 **E** 37



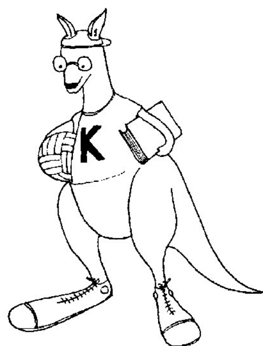
? Čia spėlioti neverta – geriau skaičiuoti.

! Kad nesusipainiotume, reikia susidaryti kokią nors sistemą, kaip skaičiuoti. Laikykime, kad mažiausio kvadratėlio kraštinė 1, tada didžiojo kvadrato kraštinė 8. Kvadratų su kraštine 1 yra 12, su kraštine 2 yra $16 + 3 = 19$, su kraštine 4 yra 9, su kraštine 6 yra 4, su kraštine 8 yra 1. Taigi iš viso yra $12 + 19 + 9 + 4 + 1 = 45$ kvadratai, ir teisingas atsakymas C.

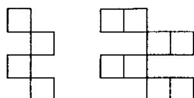
B30. Elektroninis laikrodis rodo valandas, minutes ir sekundes. Dabar yra 19:58:47. Šitame užraše visi skaitmenys skirtingi. Po kiek sekundžių pirmą kartą pasikartos panaši situacija, t.y. vėl visi skaitmenys bus skirtingi?
A 40 **B** 73 **C** 156 **D** 157 Ⓔ 898

! Iš pradžių pasižiūrėkime, kaip pradeda kisti skaitmenys. Po 1 sekundės bus 19:58:48, po 2 – 19:58:49, po 3 – 19:58:50, ir skaitmenys kartojasi. Skaitmuo 5 tikrai trukdys iki 19:58:59, tada po 13 sekundžių turėsime 19:59:00. Devynetukas tikrai trukdys dar 59 sekundes, ir po 73 sekundžių turėsime 20:00:00. Dabar aišku, kad reikia laukti užrašo 20:13:45, o tai įvyks po $73 + 13 \cdot 60 + 45 = 898$ sekundžių.

KADETAS (VII ir VIII klasės)



K1. Pirmos figūros perimetras lygus 16 cm. Koks yra antros figūros perimetras?

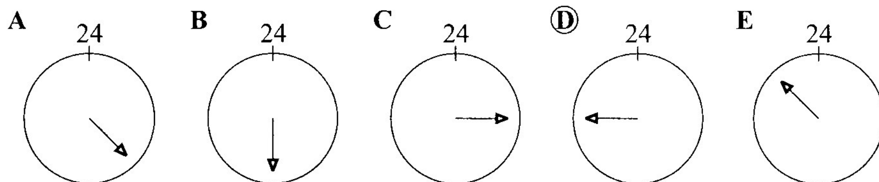


A 8 cm **B** 16 cm **C** 18 cm **(D)** 24 cm **E** 32 cm

? Iš karto aišku, kad antros figūros perimetras didesnis vos ne dvigubai. Todėl galima būtų rinktis atsakymą 24 cm, t.y. D.

! Kadangi pirmos figūros perimetras 16 cm, o ją sudaro 4 kvadratėlių perimetrai, tai kvadratėlio perimetras 4 cm, o kraštinė 1 cm. Antros figūros perimetrą sudaro perimetrai keturių stačiakampių, kurių kiekvieno perimetras yra 6 cm. Todėl antros figūros perimetras lygus 24 cm.

K2. „Kengūriško“ laikrodžio ciferblatas padalytas į 24 dalis, o ne į 12, kaip įprasta. Todėl trumpoji (t.y. valandinė) rodyklė per parą padaro tik vieną pilną apsisukimą. Kokią padėtį trumpoji rodyklė užima „kengūriško“ laikrodžio ciferblate 6 valandą po pietų?



! Per 24 valandas valandinė rodyklė padaro vieną pilną apsisukimą. 6 val. po pietų nuo 0 valandos bus praėjusios $12 + 6 = 18$ val., taigi rodyklė „rodys“ $\frac{3}{4}$ apsisukimo, t.y. bus padėtyje D.

K3. Jonas pirko tam tikrą kiekį šratinukų ir tam tikrą kiekį pieštukų. Kiekvienas šratinukas kainavo 90 centų, o kiekvienas pieštukas – 40 centų. Iš viso jis sumokėjo 3 litus ir 50 centų. Kiek pieštukų pirko Jonas?
A 1 **(B)** 2 **C** 3 **D** 4 **E** 5

? Atsakymas A netinka – tada šratinukai kainuotų 410 centų, o 410 iš 90 nesidalija. Atsakymas B reiškia, kad pieštukai kainavo 80 ct, o šratinukai 270 ct, o už juos kaip tik išeina 3 šratinukai. Taigi renkamės atsakymą B.

! Tęsdami samprotavimą, gauname, kad 3 pieštukai netinka – likę $350 - 120 = 230$ centų nesidalija iš 90; 4 pieštukai taip pat netinka: $350 - 160 = 190$ centų nesidalija iš 90;

5 pieštukai taip pat netinka – likę $350 - 200 = 150$ centų taip pat nesidalija iš 90. Taigi vienintelis teisingas atsakymas yra 2 pieštukai, t.y. B.

!! Pažymėkime pieštukų skaičių x, o šratinukų y. Tada lygtį $40x+90y = 350$, arba $4x+9y = 35$, reikia išspręsti sveikaisiais neneigiamaisiais skaičiais. Jei $x = 0$, tai $9y = 35$ ir y nėra sveikas. Jei $x = 1$, tai $9y = 31$, ir dešinė pusė nesidalija iš 9. Jei $x = 2$, tai $9y = 27$, $y = 3$, ir gauname lygties sprendinį (1; 3). Jei $x = 3$, tai $9y = 23$, – prieštara. Jei $x = 4$, tai $9y = 19$, – prieštara. Jei $x = 5$, tai $9x = 15$, jei $x = 6$, tai $9y = 11$, jei $x = 7$, tai $9y = 7$, jei $x = 8$, tai $9y = 3$, ir visur dešinė lygties pusė nesidalija iš 9. Jei $x \geqslant 9$, tai $9y$ neigiamas, ir sprendinių nėra. Sprendimas baigtas.
Dar paprasčiau būtų perrinkinėti y reikšmes.

K4. Žr. B7 uždavinio sprendimą (beje, duomenys ten truputį pakeisti).

K5. Karolis atsiverčia žodyną ir sako: „Jeigu prie puslapio, kurio man reikia, numerio pridėsiu sekančio puslapio numerį, tai gausiu 341“. Kurio puslapio reikia Karoliui?
A 171 **B** 341 **C** 147 **(D)** 170 **E** 174

? Puslapių numeriai skiriasi nedaug. Padaliję 341 pusiau, gauname 170,5. Spėjame, kad tai puslapiai 170 ir 171. Iš tikrųjų, jų suma lygi 341. Renkamės atsakymą D.

! Sudėję reikiamo puslapio numerį ir vienetu už jį didesnį skaičių, gauname 341. Todėl sudėję du reikiamo puslapio numerius gausime 340. Vadinasi, puslapio numeris dukart mažesnis ir lygus 170.

!! Pažymėkime reikiamo puslapio numerį x, tada po jo einančio puslapio numeris $x + 1$. Pagal sąlygą $x + x + 1 = 341$, $2x = 340$, $x = 170$.

K6. Tą naktį pabudau. Mano laikrodis rodė 2^{00} po vidurnakčio. Pastebėjęs, kad laikrodis neina, prisukau jį ir užmigau. Kai rytą išėjau iš namų, mano laikrodis rodė 5^{30}, o gerai einantis bažnyčios laikrodis rodė 7^{00}. Kelintą valandą aš buvau pabudęs naktį?
A 4^{00} **(B)** 3^{30} **C** 0^{30} **D** 3^{00} **E** 4^{30}

! Kadangi mano laikrodis iš ryto atsilikinėjo pusantros valandos, tai tiek jis ir stovėjo. Vadinasi, aš naktį buvau pabudęs 3^{30}. Teisingas atsakymas B.

K7. Tėvui 52 metai, o jo dviem sūnums 24 ir 18. Po kelerių metų tėvo amžius bus lygus abiejų jo sūnų metų sumai?
A 6 **(B)** 10 **C** 5 **D** 4 **E** 11

? Po 6 metų tėvui bus 58, o sūnums 30 ir 24. Po 10 metų tėvui bus 62, o sūnums 34 ir 28. Kadangi $62 = 34 + 28$, tai renkamės atsakymą B.

! Sūnų bendras amžius dabar yra $52 - 24 - 18 = 10$ metų mažesnis. Kadangi kasmet tėvui padaugėja vieneriais metais, o sūnų amžių suma padidėja dvejais metais, tai kasmet amžių skirtumas sumažėja vieneriais metais. Vadinasi, po 10 metų tėvo amžius bus lygus sūnų amžių sumai.

!! Sakykime, kad tai įvyks po x metų. Tada tėvui bus $52 + x$ metų, vienam sūnui $24 + x$ metų, kitam sūnui $18 + x$ metų. Lygtis $52 + x = 24 + x + 18 + x$ duoda sprendinį $x = 10$.

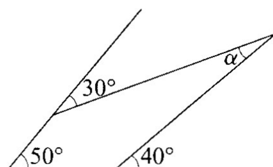
K8. Kvadratinis $10\,\text{cm} \times 10\,\text{cm}$ popieriaus lapelis padalytas į 25 cm^2 ploto kvadratus. Kiekvienas iš tų kvadratų padalytas į du trikampius. Kiek gauta trikampių?
A 5 **Ⓑ** 8 **C** 9 **D** 16 **E** 21

? Aišku, kad trikampių skaičius turi būti lyginis. Norint pasirinkti teisingą atsakymą iš B ir D, geriau skaičiuoti.

! Kadangi popieriaus lapelio plotas yra 100 cm^2, tai turime $100 : 25 = 4$ kvadratus. Padalijęę kiekvieną jų į 2 trikampius, gausime 8 trikampius. Taigi teisingas atsakymas B.

K9. Žr. B16 uždavinio sprendimą.

K10. Šalia esančiame piešinyje pavaizduoto kampo α didumas yra:
Ⓐ 20° **B** 25° **C** 30° **D** 35° **E** 40°



? Jei apatinė kampo α kraštinė būtų lygiagreti viršutinei 50° kampo kraštinei, tai α būtų 30°, o dabar kampas mažesnis už 30°. Iš dviejų atsakymų 20° ir 25° pasirinkti sunku.

! Keturkampio kampų suma yra 360°. Jo kampai yra 50°, $180° - 30° = 150°$, $180° - 40° = 140°$ ir α. Todėl $\alpha = 360° - 50° - 150° - 140° = 20°$. Taigi teisingas atsakymas A.

K11. Jeigu

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{a}{b} = 9,$$

tai $a + b =$
A 17 **B** 18 **Ⓒ** 35 **D** 37 **E** 41

? Tikriname atsakymą A. Tada $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{17}{16} = \frac{17}{2}$, – netinka. Kai $a = 18$, tai $b = 17$, ir $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{18}{17} = \frac{18}{2} = 9$, ir $a + b = 35$. Renkamės atsakymą C.

! $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdots \frac{a}{b} = \frac{a}{2}$, todėl $a = 18$. Tada $b = 17$, ir $a + b = 35$.

K12. $(1900 + 1901 + 1902 + \cdots + 1999) - (100 + 101 + 102 + \cdots + 199) =$
Ⓐ 180 000 **B** 178 200 **C** 1 800 000 **D** 1 801 800 **E** 1 900 000

! Matome, kad kiekvienuose skliaustuose yra po 100 dėmenų, kurie didėja vienetu. Todėl pirmo ir pirmo, antro ir antro ir t.t. dėmenų skirtumai nekinta ir lygūs 1800. Tokių skirtumų yra 100, todėl gausime 180 000, t.y. atsakymą A.

K13. Futbolo komandoje yra 11 žaidėjų. Vidutinis tų žaidėjų amžius lygus 22 metams. Rungtynių metu vienas iš tos komandos žaidėjų susižeidė ir buvo priverstas palikti aikštę. Tada likusiųjų futbolininkų vidutinis amžius pasidarė lygus 21 metams. Kiek metų turėjo susižeidęs futbolininkas?

A 21 **B** 22 **C** 23 **(D)** 32 **E** 33

? Kadangi likusių žaidėjų amžiaus vidurkis sumažėjo, tai išėjo turėjęs daugiau kaip 22 metus, ir atkrenta atsakymai A ir B. Deja, toliau ką nors pasakyti sunku.
Tikriname atsakymą C. Jei susižeidęs futbolininkas turėtų 23 metus, tai visų 11 futbolininkų amžių suma būtų $23 + 10 \cdot 21 = 233$, ir jų amžiaus vidurkis nėra 22. Jeigu jo amžius 32 metai, tai $32 + 10 \cdot 21 = 242$, ir vidurkis $242 : 11 = 22$ metai. Renkamės atsakymą D.

! Bendra komandos žaidėjų amžių suma buvo $22 \cdot 11$, o pasidarė $21 \cdot 10$. Vadinasi, išėjęs žaidėjas turėjo $242 - 210 = 32$ metus.

K14. Kai Jonukas eina į mokyklą pėsčias, o namo grįžta važiuodamas dviračiu, kartu tai jam užima $1\frac{1}{2}$ valandos. Kai jis į abi puses važiuoja dviračiu, jam tai užima $\frac{1}{2}$ valandos. Kiek laiko Jonukui užima nueiti į mokyklą ir grįžti pėsčiam?

A $1\frac{1}{4}$ h **B** 2 h **(C)** $2\frac{1}{2}$ h **D** $2\frac{3}{4}$ h **E** $3\frac{1}{2}$ h

? Tikriname atsakymą A. Į abu galus Jonukui nueiti reikia $1\frac{1}{4}$ h, todėl į vieną galą $\frac{5}{8}$ h. Dviračiu į vieną galą reikia $\frac{1}{4}$ h. Vadinasi, kelias į mokyklą pėsčiam ir atgal dviračiu užimtų $\frac{5}{8} + \frac{1}{4} = \frac{7}{8}$ h, o ne $1\frac{1}{4}$ h.
Tikriname atsakymą B. Į abu galus pėsčiam Jonukui reikia 2 h, todėl į vieną galą 1 h. Pridėjus $\frac{1}{4}$ h dviračiu, visai kelionei išeis $1\frac{1}{4}$, o ne $1\frac{1}{2}$ h. Tikriname atsakymą C. Į abu galus pėsčiam reikia $2\frac{1}{2}$ h, todėl į vieną galą $1\frac{1}{4}$ h, o iš viso $1\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1\frac{1}{2}$ h, kaip ir turi būti. Taigi renkamės atsakymą C.

! Kai Jonukas dukart nuvyksta į mokyklą pėsčias ir dukart grįžta dviračiu, jis sugaišta $2 \cdot 1\frac{1}{2} = 3$ valandas. Per tas 3 valandas jis dvigubą atstumą nuo namų iki mokyklos įveikia pėsčias ir dvigubą dviračiu. Bet dvigubą atstumą dviračiu jis įveikia per $\frac{1}{2}$ valandos. Vadinasi, dvigubą atstumą iki mokyklos (t.y. kelią į mokyklą ir atgal) jis įveikia per $2\frac{1}{2}$ valandos.

K15. Žr. B19 uždavinio sprendimą.

K16. Raudonkepuraitė savo močiutei suruošė krepšelį su vaisiais: 7 obuoliais, 8 kriaušėmis ir 3 apelsinais. Eidama pas močiutę, Raudonkepuraitė suvalgė 2 vaisius. Kokia situacija yra įmanoma:

A Močiutei neliko apelsinų **B** Močiutei liko mažiau kriaušių negu apelsinų
C Močiutei liko tiek pat kiekvienos rūšies vaisių **(D)** Močiutei liko tiek pat dviejų rūšių vaisių **E** Močiutei liko daugiau obuolių negu likusių vaisių

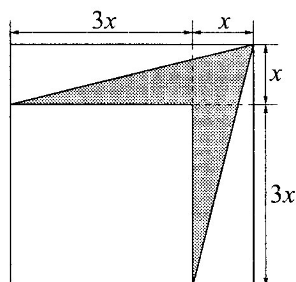
? Atsakyme A močiutei neliko apelsinų, taigi suvalgyti buvo ne mažiau kaip 3 vaisiai, – prieštara. Atsakyme B močiutei kriaušių liko mažiau negu apelsinų, vadinasi, buvo suvalgytos mažiausiai 6 kriaušės, – prieštara. Atsakyme C močiutei liko po tiek pat kiekvienos rūšies vaisių, todėl Raudonkepuraitė suvalgė mažiausiai 4 obuolius ir 5 kriaušes,

– prieštara. Atsakyme D močiutei liko tiek pat dviejų rūšių vaisių, todėl Raudonkepuraitė galėjo suvalgyti 1 kriaušę ir 1 apelsiną. Renkamės atsakymą D.

! Jei Raudonkepuraitė suvalgė 2 vienodus vaisius, tai neįmanoma nei viena situacija. Jei ji suvalgė 1 obuolį ir 1 kriaušę, tai liko 6 obuoliai, 7 kriaušės, ir 3 apelsinai, taigi nei viena situcija neįmanoma. Jei ji suvalgė 1 obuolį ir 1 apelsiną, tai vėl nei viena situacija neįmanoma. Jeigu ji suvalgė 1 kriaušę ir 1 apelsiną, tai liko 7 obuoliai, 7 kriaušės ir 2 apelsinai, ir įmanoma tik situacija D.

!! Močiutei negalėjo nelikti apelsinų, taigi situacija A neįmanoma. Jai negalėjo likti mažiau kriaušių negu apelsinų, taigi situacija B neįmanoma. Jai negalėjo likti tiek pat visų rūšių vaisių, taigi situacija C neįmanoma. Močiutei negalėjo likti daugiau obuolių negu kitų vaisių, taigi situacija E neįmanoma. O štai situacija D įmanoma tik tada, jei Raudonkepuraitė suvalgė 1 kriaušę ir 1 apelsiną.

K17. Šalia pavaizduoto kvadrato užtušuotos dalies plotas lygus:
A x^2 Ⓑ $3x^2$ **C** $6x^2$ **D** $7x^2$ **E** $9x^2$



? Viso kvadrato plotas $16x^2$, o mažojo kvadrato plotas $9x^2$, taigi likusios dalies plotas $7x^2$. Užtušuota dalis kiek mažesnė, todėl renkamės atsakymą $3x^2$, t.y. B.

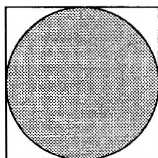
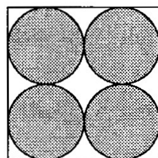
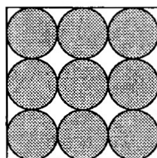
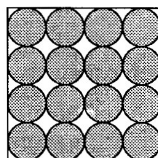
! Užtušuotos dalies plotą gausime iš didžiojo kvadrato ploto atėmę mažojo kvadrato plotą ir dar dviejų trikampių plotus: $16x^2 - 9x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot 4x = 7x^2 - 4x^2 = 3x^2$.

K18. Didelis matmenų $9 \times 9 \times 9$ kubas sudėtas iš mažų kubelių $1 \times 1 \times 1$. Didysis kubas nuspalvintas. Keli iš mažųjų kubelių turi lygiai dvi nuspalvintas sienas?
Ⓐ 84 **B** 54 **C** 100 **D** 108 **E** 478

! Dvi nuspalvintas sienas turi tie kubeliai, kurie sudaro kubo briaunas, išskyrus tuos, kurie yra kubo viršūnėse (pastarieji turi 3 nuspalvintas sienas). Kiekviena briauna turi 7 tokius kubelius, o briaunų yra 12 – keturios viršutinės, keturios apatinės ir keturios vertikalios. Vadinasi, tokių kubelių yra $7 \cdot 12 = 84$, t.y. teisingas atsakymas A.

!! Suskaičiuokime, kiek yra kubelių kubo briaunose. Kiekvienoje briaunoje yra 9 kubeliai, briaunų yra 12, taigi taip skaičiuodami suskaičiuojame 108 kubelius. Bet kiekvienoje viršūnėje susieina trys briaunos, todėl viršūnių kubeliai į sumą įskaityti net 3 kartus. Vadinasi, 2 kartus reikia atmesti kampinių kubelių skaičių 8. Taigi gauname, kad kubo briaunose yra 92 kubeliai. Iš šio skaičiaus reikia atmesti viršūnių kubelių skaičių 8, taigi gauname 84 kubelius.

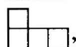
K19. Kiekviename iš žemiau esančių piešinių pavaizduotas kvadratas su kraštine 1, kuriame yra užtušuotų skritulių. Kuriame piešinyje užtušuotas plotas yra didesnis negu likusiuose piešiniuose?

A 1 piešinyje **B** 2 piešinyje **C** 3 piešinyje **D** 4 piešinyje
Ⓔ Visuose keturiuose piešiniuose užtušuoti plotai lygūs

? Padalykime antrą kvadratą į 4 dalis vertikalia ir horizontalia vidurinėmis linijomis. Gausime 4 kvadratus, panašius pirmo piešinio kvadratui, todėl greičiausiai užtušuotos dalies ploto ir visos figūros ploto santykis nekinta. Renkamės atsakymą E.

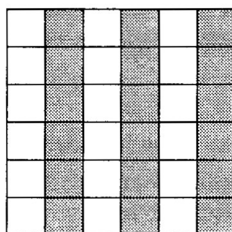
! Kadangi pirmame piešinyje skritulio spindulys lygus $\frac{1}{2}$, tai jo plotas lygus $\frac{\pi^2}{4}$. Antrame piešinyje kiekvieno skritulio spindulys lygus $\frac{1}{4}$, todėl vieno skritulio plotas lygus $\frac{\pi^2}{16}$, o 4 skritulių plotas $\frac{\pi^2}{4}$. Panašiai trečio piešinio skritulio spindulys $\frac{1}{6}$, plotas $\frac{\pi^2}{36}$, o 9 skritulių plotas $\frac{\pi^2}{4}$. Lygiai taip pat ketvirto piešinio skritulių plotas lygus $\frac{\pi^2}{4}$. Taigi teisingas tik atsakymas E.

K20. Kurio iš stačiakampių su žemiau nurodytais matmenimis negalima sudėti iš figūrų , sudarytų iš 4 vienetinių kvadratų?

A 4×4 **Ⓑ** 6×6 **C** 8×8 **D** 4×6 **E** 6×8

? Aišku, kaip sudėti stačiakampį 4×2. Todėl paprasta sudėti stačiakampius 4×4, 8×8, 4×6, 8×6. Vadinasi, sudėti negalima stačiakampio 6×6. Renkamės atsakymą B.

! Jau įrodėme, kad galima sudėti stačiakampius A, C, D, E. Liko įrodyti, kad negalima sudėti kvadrato 6×6.
Pasirodo, kad tai ypač sunkus („olimpiadinis") uždavinys.
Užtušuokime kvadratą 6×6, kaip parodyta piešinyje:



Tarkime, kad mums pavyko uždengti kvadratą nurodytomis figūromis. Nesunku įsitikinti, kad nors ir kaip tą figūrą padėtume kvadrate, ji uždengtų nelyginį užtušuotų (žinoma, ir

baltųjų) langelių skaičių. Iš tikrųjų, jeigu 3 langelių juosta eis vertikaliai, tai visų 3 langelių spalva bus vienoda, o 4-to langelio – skirsis. Jeigu 3 langelių juosta eis horizontaliai, tai jos vertikalioji dalis turės du vienos spalvos langelius, gretimas jai langelis bus kitos spalvos, o paskutinis – vėl pradinės spalvos.

Kadangi kvadratas sudarytas iš $6 \times 6 = 36$ langelių, tai jis būtų uždengtas $36 : 4 = 9$ figūromis. Bet visos tos 9 figūros dengia nelyginį juodųjų langelių skaičių, todėl bendras uždengtų juodųjų langelių skaičius nelyginis. O štai kvadrate yra 18 juodų langelių, – prieštara. Įrodymas baigtas.

Pastaba. Čia turime labai pamokomą pavyzdį, kaip daug gali skirtis sunkumu testinis „Kengūros“ konkurso uždavinys nuo olimpiadinio uždavinio. Įrodyti, kad kvadrato 6×6 negalima uždengti nurodytomis figūromis, yra labai sunku – be treniruočių beveik neįmanoma. O štai testiniame uždavinyje, kai iš anksto pasakyta, kad keturi atsakymai klaidingi, o vienas teisingas – viskas paprasta: kadangi nesunku įsitikinti, kad 4 atsakymai klaidingi, tai penktas atsakymas automatiškai teisingas!

K21. Turime tris skaičius: 3^{3^3}, 3^{33} ir $(3^3)^3$. Jeigu didžiausią iš jų padalysime iš mažiausio, tai dalmuo bus lygus

A 1 **B** 3 **C** 3^9 **D** 3^{18} **(E)** 3^{24}

! Kadangi $3^{3^3} = 3^{27}$, o $(3^3)^3 = 3^9$, tai didžiausias skaičius yra 3^{33}, o mažiausias 3^9. Jų dalmuo $3^{33} : 3^9 = 3^{24}$, taigi teisingas atsakymas E.

K22. Teste yra 30 klausimų. Už teisingą atsakymą duodami 7 taškai, bet jeigu atsakymas klaidingas arba iš viso neduotas, tai iš bendro taškų skaičiaus atimama 12 taškų. Kaziukas už testą gavo 77 taškus. Į kiek klausimų jis nedavė teisingo atsakymo?

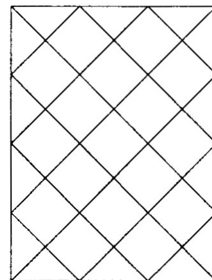
A Nuo 0 iki 4 **(B)** Nuo 5 iki 8 **C** Nuo 9 iki 12 **D** Nuo 13 iki 16

E Nuo 17 iki 20

? Aišku, kad kuo didesnis neteisingų atsakymų skaičius, tuo mažesnis Kaziuko rezultatas. Jeigu jis duotų 4 neteisingus atsakymus, tai gautų $26 \cdot 7 - 4 \cdot 12 = 134$ taškus. Jeigu jis duotų 8 neteisingus atsakymus, tai gautų $22 \cdot 7 - 8 \cdot 12 = 58$ taškus. Vadinasi, jo neteisingų atsakymų skaičius yra nuo 5 iki 7. Renkamės atsakymą B.

! Pažymėkime teisingų atsakymų skaičių x. Tada už $30 - x$ atsakymų Kaziukas gavo po -12 taškų. Turime lygtį $7x - 12(30 - x) = 77$, $19x = 437$, $x = 23$. Vadinasi, jis nedavė teisingo atsakymo į 7 klausimus, ir teisingas atsakymas B.

!! Už visus 30 atsakymų galima gauti 210 taškų. Atsakius į 1 klausimą neteisingai, netenkama 7 taškų ir gaunama dar 12 taškų baudos, taigi bendra suma sumažėja 19 taškų. Vadinasi, padarius vieną klaidą taškų skaičius bus 191, padarius dvi – 172, padarius tris – 153, padarius septynias – 77. Vadinasi, Kaziukas padarė 7 klaidas.



K23. Šalia esančiame piešinyje pavaizduotos grindys yra stačiakampio formos, kurio plotis 3 m, o ilgis – 4 m. Grindys išklotos keraminėmis plytelėmis, ir tam sunaudota 17 kvadratinių plytelių ir 14 trikampių plytelių. Reikia tokiu pat būdu ir tokiomis pat plytelėmis iškloti grindis, kurių matmenys $10\,\text{m} \times 20\,\text{m}$. Kiek tam prireiks kvadratinių plytelių?

A 200 **B** 230 **C** 300 **(D)** 370 **E** 400

? Pirmojo stačiakampio plotas 12 m^2, ir jam prireikė 17 kvadratinių plytelių. Galima spėti, kad kvadratinių plytelių skaičius maždaug proporcingas grindų plotui, tada 1 m^2 reikėtų apie $\frac{17}{12}$ plytelės, todėl kitoms grindims, kurių plotas 200 m^2 reikėtų apie $200 \cdot \frac{17}{12} = 50 \cdot \frac{17}{3} = 850 : 3 = 283$ plytelių. Taigi renkamės atsakymą C.

! Iš piešinio matome, kad trikampių plytelių reikia tiek, koks yra grindų perimetras. Todėl naujoms grindims reikės $2 \cdot (10 + 20) = 60$ trikampių plytelių. Stačiakampio kampe sueinančių dviejų plytelių bendras plotas yra $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$ m^2, todėl 60 trikampių plytelių plotas bus 15 m^2. Vadinasi, kvadratinėmis plytelėmis išklotas plotas bus $10 \cdot 20 - 15 = 185$ m^2. Kadangi kvadratinės plytelės plotas lygus dviejų trikampių plytelių plotui, tai jos plotas yra $\frac{1}{2}$ m^2. Todėl 185 m^2 plotui iškloti reikia 370 kvadratinių plytelių. Vadinasi, teisingas atsakymas D.

Pastaba. Matome, kad spėjimas mus čia nuvedė klaidingu keliu – skaičiavimas visada patikimesnis. Mūsų klaida – prielaida, kad kvadratinių plytelių skaičiai maždaug proporcingi plotams (beje, tai iš tikrųjų taip, kai plotai dideli!).

Įdomu, kad mums būtų pasisekę atspėti atsakymą, jeigu iš pradžių remtumės prielaida, kad reikalingų trikampių plytelių skaičius proporcingas stačiakampio perimetrui. Kadangi pirmajam stačiakampiui, kurio perimetras $2 \cdot (3 + 4) = 14$ m, prireikė 14 plytelių, tai antrajam stačiakampiui, kurio perimetras 60 m, prireiks 60 plytelių. Dvi trikampės plytelės atitinka vieną kvadratinę, taigi galima sakyti, kad pirmajam stačiakampiui, kurio plotas 12 m^2, reikėjo $17 + 14 : 2 = 24$ plytelių. Tada antrajam, kurio plotas 200 m^2, reikės 400 plytelių. Iš jų reikia atmesti 30 plytelių, kurios pakeičia trikampes, vadinasi, reikės 370 kvadratinių plytelių.

Bet – po laiko visi gudrūs. O be to, toks samprotavimas labai primena tikrąjį sprendimą.

K24. Bilieto į teatrą kaina padidėjo 40%, bet įplaukos už tuos bilietus padidėjo tik 26%. Kiek procentų sumažėjo žiūrovų skaičius?

(A) 10% **B** 14% **C** 20% **D** 38% **E** 50%

? Sakykime, kad žiūrovų buvo 100, jie mokėjo po 10 Lt, taigi įplaukos buvo 1000 Lt. Kai bilietai pasidarė 14 Lt, buvo surinkta 1260 Lt, taigi žiūrovų buvo $1260 : 14 = 630 : 7 = 90$. Vadinasi, žiūrovų sumažėjo dešimtimi, o tai sudaro 10%. Renkamės atsakymą A.

! Negailėkime raidžių! Sakykime, iš pradžių žiūrovų buvo x, bilieto kaina y, taigi įplaukos buvo $x \cdot y$. Kai bilieto kaina pasidarė $1{,}4y$, įplaukos pasidarė $xy \cdot 1{,}26$, taigi žiūrovų buvo $\frac{xy \cdot 1{,}26}{1{,}4y} = \frac{126x}{140} = \frac{63x}{70} = 0{,}9x$. Vadinasi, žiūrovų skaičius sumažėjo 10%.

!! Sakykime, iš pradžių įplaukos buvo i, bilieto kaina b, taigi žiūrovų buvo $\frac{i}{b}$. Paskui įplaukos pasidarė $1{,}26i$, bilieto kaina $1{,}4b$, taigi žiūrovų pasidarė $\frac{1{,}26i}{1{,}4b} = 0{,}9\frac{i}{b}$. Vadinasi, žiūrovų skaičius sumažėjo 10%.

K25. Petras, Paulius ir jų senelis meškeriojo. Per tą laiką, kai senelis pagaudavo 8 žuvis, Paulius pagaudavo 4, o Petras – 7 žuvis. Per vieną valandą Petras sugavo 42 žuvis. Kiek žuvų per tą valandą sugavo visi trys kartu?
A 58 **B** 94 **(C)** 114 **D** 125 **E** 132

! Kai Petras pagaudavo 7 žuvis, visi kartu pagaudavo 19 žuvų. Todėl kai Petras pagavo 6 kartus daugiau – 42 žuvis, tai visi pagavo $6 \cdot 19 = 114$ žuvų. Teisingas atsakymas C.

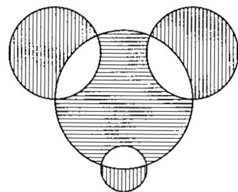
K26. Kiek skirtingų sprendinių natūraliaisiais skaičiais turi lygtis $a^2b - 1 = 1999$?
A 3 **B** 4 **C** 5 **(D)** 6 **E** 7

? Perrašome lygtį taip: $a^2b = 2000$. Nesunku išrinkti visas tinkamas a reikšmes: tinka tos reikšmės, kai 2000 dalijasi iš a^2. Taigi tinka 1, 2 (netinka 3 ir jo kartotiniai – dešinė nesidalija iš 3), 4, 5 (netinka 7 ir jo kartotiniai – dešinė nesidalija iš 7; netinka 8 ir jo kartotiniai – dešinė nesidalija iš 64), tinka 10 (netinka 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 ir jų kartotiniai – dešinė nesidalija iš jų), tinka 20 (netinka 25 – dešinė nesidalija iš 625). Nepatikrinti liko skaičiai, didesni arba lygūs 47, bet jie per dideli: jau $45^2 = 2025$. Radome visus sprendinius: 1, 2, 4, 5, 10, 20. Taigi teisingas atsakymas D.

! Perrašome lygtį taip: $a^2b = 2000$. Kadangi a^2 turi būti pilnasis kvadratas, o $2000 = 2 \cdot (2 \cdot 5)^3 = 2^4 \cdot 5^3$, tai a^2 gali įgyti reikšmes $1, 2^2, 2^4, 5^2, 2^2 \cdot 5^2, 2^4 \cdot 5^2$. Tada tiek a, tiek b reikšmės nustatomos vienareikšmiškai, taigi yra 6 sprendiniai.

!! a^2 turi pavidalą $2^m \cdot 5^n$, kur $m = 0, 1, 2$, o $n = 0, 1$. Kadangi m galima pasirinkti 3 būdais, o n – 2 būdais, tai a^2 galima pasirinkti $3 \times 2 = 6$ būdais (kombinatorinė daugybos taisyklė).

K27. Srities, užbrūkšniuotos vertikaliomis linijomis, plotą pažymėkime P, o plotą srities, užbrūkšniuotos horizontaliomis linijomis, – S. Skritulių skersmenys atitinkamai lygūs 6, 4, 4, 2. Tada:



A $2P = S$ **B** $3P = 2S$
(C) $P = S$ **D** $2P = 3S$ **E** $P = 2S$

! Didžiojo skritulio plotas 9π, mažųjų skritulių plotų suma $4\pi + 4\pi + \pi = 9\pi$. Kadangi iš abiejų minėtų sričių atmesta tokia pat („baltoji“) sritis, tai plotai ir lieka lygūs. Vadinasi, teisingas tik atsakymas C.

K28. Šalia pavaizduotoje sudėtyje kiekviena raidė žymi tam tikrą skaitmenį, tas pačias raides atitinka vienodi skaitmenys, o skirtingas raides – skirtingi skaitmenys. Šitame užraše skaitmens 0 nėra. Kokia gali būti didžiausia sumos DREI reikšmė?

$$\begin{array}{r} \text{ONE} \\ +\ \text{DEUX} \\ \hline \text{DREI} \end{array}$$

A 9863 **(B)** 9873 **C** 9874 **D** 9875 **E** 9876

? Įdomus atvejis. Visiškai neapsimoka tikrinti nuo mažiausio skaičiaus. Na, įsitikinsime, kad jis gali tikti – bet juk gal ir didesni tinka. Taigi pradedame nuo didžiausio – jeigu jis tinka, tai jis ir yra atsakymas. Įrašome vietoj DREI skaičių 9876 ir parašome visur vietoj E skaitmenį 7, o vietoj D skaitmenį 9:

$$\begin{array}{r} * * 7 \\ +\,9\,7 * * \\ \hline 9\,8\,7\,6 \end{array}$$

Dabar reikėtų antroje eilutėje paskutinį skaitmenį vietoj X rašyti 9, bet 9 jau užėmė raidė D. Taigi skaičius 9876 netinka.
Įrašome vietoj DREI skaičių 9875:

$$\begin{array}{r} * * 7 \\ +\,9\,7 * * \\ \hline 9\,8\,7\,5 \end{array}$$

Vėl vietoj X reikėtų skaitmens 8, bet 8 jau užimtas.
Įrašome vietoj DREI skaičių 9874:

$$\begin{array}{r} * * 7 \\ +\,9\,7 * * \\ \hline 9\,8\,7\,4 \end{array}$$

Vietoj X reikėtų rašyti 7, bet jis jau užimtas.
Vietoj DREI rašome skaičių 9873:

$$\begin{array}{r} * * 7 \\ +\,9\,7 * * \\ \hline 9\,8\,7\,3 \end{array}$$

Matome, kad vietoj O tiktų tik 1, o vietoj X – tik 6:

$$\begin{array}{r} 1 * 7 \\ +\,9\,7 * 6 \\ \hline 9\,8\,7\,3 \end{array}$$

Įrašę į likusias vietas 2 ir 4 (bet kaip), įsitikiname, kad atsakymas 9873 tinka. Renkamės atsakymą B.

! Didžiausias keturženklis skaičius be pasikartojančių skaitmenų yra 9876, bet nežinome, ar jis tiks. Vis dėlto laisvės renkantis likusius skaitmenis ne taip jau mažai, tai sugudraukime: imkime pirmus tris skaitmenis 987, o paskutinį pabandykime nustatyti. Taigi sprendžiame uždavinį:

$$\begin{array}{r} * * 7 \\ +\,9\,7 * * \\ \hline 9\,8\,7 * \end{array}$$

Vietoj O tinka tik 1:

$$\begin{array}{r} 1*7 \\ +\ 97** \\ \hline 987* \end{array}$$

Pagalvokime, koks gali būti X. Skaitmenys 1, 7, 8, 9 jau užimti. Negali būti X = 2 – tada I turėtų būti 9. Negali būti X = 3: tada I būtų 0, o tai pagal sąlygą neįmanoma. Negali būti X = 4 – tada I būtų jau užimtas 1. Jeigu X = 5, tai I = 2:

$$\begin{array}{r} 1*7 \\ +\ 97*5 \\ \hline 9872 \end{array}$$

Dabar neparašytų skaitmenų suma turėtų būti lygi 6, bet net mažiausi nepanaudoti skaičiai 3 ir 4 duoda 7, – prieštara.
Liko patikrinti X = 6. Tada I = 3:

$$\begin{array}{r} 1*7 \\ +\ 97*6 \\ \hline 9873 \end{array}$$

Matome, kad vietoj neįrašytų skaitmenų galima rašyti 2 ir 4 (bet kuria tvarka).
Taigi didžiausia galima DREI reikšmė yra 9873.

!! Galima nagrinėti ir paskutinį sumos skaitmenį. Turime

$$1*7+97**=987*.$$

Vietoj žvaigždučių reikia įrašyti 4 skaitmenis iš penkių galimų 2, 3, 4, 5, 6 taip, kad jie nesikartotų.
Iš tikrųjų pirmieji skaitmenys jau aiškūs, taigi lieka iššifruoti sudėtį:

$$*7+**=7*.$$

Sumos paskutinis skaitmuo negali būti 6, nes tada antro dėmens antras skaitmuo būtų 9. Lygiai taip pat I negali būti 5 – tada * būtų 8. Negali būti I = 4, nes tada būtų X = 7. O štai I = 3 būti gali – tada X = 6:

$$*7+6=73.$$

Dabar vietoj žvaigždučių galima imti 2 ir 4 bet kuria tvarka.
Sprendimas baigtas, nes mažesnių skaičių tikrinti nebereikia. Vis dėlto pasižiūrėkime, ar gali lygybėje

$$*7+**=7*$$

būti I = 2. Tada X = 5:

$$*7+*5=72.$$

Žvaigždutėmis pažymėtų skaitmenų suma turėtų būti 6, bet mažiausi likę skaitmenys yra 3 ir 4.
Taigi uždavinyje $1*7+97**=987*$ galima tik suma 9873.

Pastaba. Įmanoma gauti ir atsakymo A sumą 9863:

$$2*6+96*7=9863,$$

ir vietoj žvaigždučių galima imti 1 ir 4 (bet kuria tvarka). Tik jau sakėme, kad atsakymo A skaičius mažesnis už atsakymo B.
Beje, turbūt visi žinote, ką reiškia žodžiai ONE, DEUX, DREI.

K29. Skaičius 1999 padaugintas iš skaičiaus, kurio dešimtainį užrašą sudaro 1999 vienetai. Kokia yra gautos sandaugos skaitmenų suma?
A 1998 **(B)** 2026 **C** 2138 **D** 2972 **E** 3956

? Skaičiaus 1999 skaitmenų suma dalijama iš 9, duoda liekaną 1. Skaičiaus 111...11 skaitmenų suma, dalijama iš 9, duoda liekaną 1. Spėjame, kad ir sandauga, dalijama iš 9, duoda liekaną 1. Bet skaičius A dalijasi iš 9 (skaitmenų suma dalijasi iš 9), skaičius B duoda liekaną 1, skaičius C duoda liekaną 5, skaičius D duoda liekaną 2, skaičius E duoda liekaną 5. Vadinasi, tai galėtų būti tik skaičius B.

! Sudauginkime skaičius 11...11 ir 1999 stulpeliu:

```
 ×11111...11111
           1999
  99999...99999
 9999 ...99999
999.....99999
1111....11111
22211...111110889
```

Matome, kad tame 2002-ženklyje skaičiuje 3 dvejetai, 1995 vienetai, 1 nulis, 2 aštuonetai, 1 devynetas. Taigi jo skaitmenų suma yra $6+1995+16+9=2026$.

!! Dar lengviau skaičius sudauginti taip:

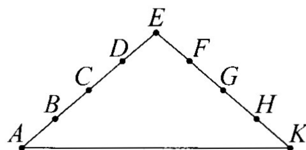
$$111\ldots11\cdot1999=111\ldots11(2000-1)=222\ldots22000-111\ldots11.$$

Užrašę atimtį stulpeliu, turime:

```
 _2222...22000
      1...11111
  2221...10889
```

Gavome tą patį skaičių, kurio skaitmenų sumą suskaičiuoti jau mokame.

K30. Šalia esančiame piešinyje pavaizduota trasa, einanti į kalvos viršūnę ir po to priešingu šlaitu žemyn. Atstumai tarp gretimų punktų yra vienodi. Kopdamas į kalvą, Petras užtrunka tiek pat laiko įveikdamas kiekvieną atkarpą tarp dviejų gretimų punktų.



Kopdamas į kalvą, Petras sugaišta daugiau laiko negu leisdamasis žemyn, bet ir leisdamasis jis užtrunka tiek pat laiko kiekvienoje atkarpoje tarp gretimų punktų. Kuris iš žemiau nurodytų maršrutų užims Petrui mažiausiai laiko?

A $C \to E \to G \to F$ **B** $A \to E \to F$ **C** $D \to E \to K \to H$

(D) $C \to E \to H$ **E** $D \to E \to H \to F$

! Laikykime, kad vienai atkarpai leisdamasis nuo kalno Petras sugaišta laiko vienetą, o kopdamas į kalną – laiką t (pagal sąlygą $t > 1$). Suskaičiuojame, kiek laiko užima kiekvienas maršrutas:

A: $2t + 2 + t = 3t + 2$

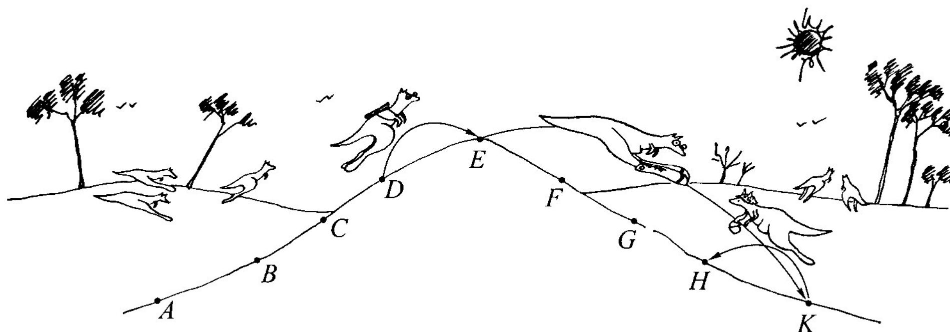
B: $4t + 1$

C: $t + 4 + t = 2t + 4$

D: $2t + 3$

E: $t + 3 + 2t = 3t + 3$

Be abejonės, maršrutas C užima daugiau laiko nei maršrutas D, todėl maršrutas C atkrinta. Taip pat E atkrinta – jis užima daugiau laiko nei maršrutas A. Lieka laikai $3t + 2$, $4t + 1$ ir $2t + 3$. Nesunku įsitikinti, kad $2t + 3$ mažiausias: $2t + 3 < 3t + 2$, nes $1 < t$; taip pat $2t+3 < 4t+1$, nes $2 < 2t$. [Beje, užrašę laikus kaip $5+3(t-1)$, $5+4(t-1)$, $5+2(t-1)$, matome, kad mažiausias paskutinis laikas.] Taigi teisingas atsakymas D.



JUNIORAS (IX ir X klasės)



J1. „Kenga“ yra kubinis kauliukas, kurio 3 sienelės nudažytos raudonai ir 3 – žaliai. Kiek galima padaryti skirtingų „Kengos“ kauliukų?

A 1 **(B)** 2 **C** 3 **D** 4 **E** 6

! Yra dvi galimybės: arba 1) yra dvi priešingos raudonos sienos, arba 2) jų nėra.

1) Sakykime, kad yra pora raudonų priešingų sienų. Padėkime kubelį taip, kad tos sienos būtų viršutinė (V) ir apatinė (A). Pasukime kubelį apie vertikaliąją ašį taip, kad trečioji raudona siena taptų užpakaline (U). Tada likusios 3 sienos – priekinė (P), kairioji (K) ir dešinioji (D) – žalios. Vadinasi, su priešingomis raudonomis sienomis yra tik viena kubelių rūšis.

2) Sakykime, kad nėra priešingų raudonų sienų. Tada padėkime kubelį taip, kad A būtų raudona. Dabar pasukime kubelį apie vertikaliąją ašį taip, kad U būtų raudona. Kadangi P negali būti raudona, tai raudona arba K, arba D. Bet jeigu raudona K, tai raudonos K ir U. Tada kubelį pasukame pagal laikrodžio rodyklę 90° žiūrint vertikaliosios ašies kryptimi žemyn (t.y. žiūrint iš viršaus), ir raudonos taps sienos U ir D. Vadinasi ir toks kubelis tėra vienas.

Vadinasi, yra tik dviejų rūšių kubelių, ir teisingas atsakymas B.

J2. Mano keturi bičiuliai ir aš susimetėm pinigų tortui pirkti; vidutiniškai kiekvienas davė po 8 litus. Aš daviau 10 litų. Kiek vidutiniškai litų davė kiekvienas iš mano bičiulių?

A 6 **B** 6,50 **C** 7 **(D)** 7,50 **E** 8

! Jeigu 5 žmonės davė vidutiniškai po 8 litus, tai tortas kainavo 40 litų. Kadangi aš daviau 10 litų, tai mano 4 draugai davė kartu 30 litų. Vadinasi, vidutiniškai kiekvienas iš jų davė 30 : 4 = 7,50 lito. Taigi teisingas atsakymas D.

J3. Pasakiau, kad tam tikras natūralusis skaičius yra skaičių 2 ir 5 kartotinis. Deja, aš apsirikau. Kuris iš žemiau parašytų sakinių yra tikrai teisingas?

A Tas skaičius nėra skaičiaus 3 kartotinis

B Tas skaičius nėra skaičiaus 7 kartotinis

(C) Tas skaičius nėra skaičiaus 10 kartotinis

D Tas skaičius yra skaičiaus 2 arba skaičiaus 5 kartotinis

E Tas skaičius yra skaičiaus 2 ir skaičiaus 5 kartotinis

? Atsakymas A nebūtinai teisingas: užtenka imti skaičių 15. Tada jis nėra skaičiaus 2 kartotinis, bet yra skaičiaus 3 kartotinis.

Atsakymas B nebūtinai teisingas: imkime skaičių 35. Tada jis nėra 2 kartotinis, bet yra 7 kartotinis.

Atsakymas C teisingas: kadangi tas skaičius nesidalija arba iš 2, arba iš 5, tai jis tikrai nesidalija iš 10.

Renkamės atsakymą C.

! Dar reikia įsitikinti, kad atsakymai D ir E neteisingi. Tikrinkime atsakymą D: imkime, pavyzdžiui, skaičių 21. Tada teiginys, kad 21 yra 2 ir 5 kartotinis, neteisingas – kaip ir turi būti. Bet neteisingas ir atsakymas D – 21 nėra nei skaičiaus 2 kartotinis, nei skaičiaus 5 kartotinis. Neteisingas ir teiginys E – jau pagal sąlygą jis nėra tiek skaičiaus 2, tiek skaičiaus 5 kartotinis (žinoma, užtenka imti jau turėtą pavyzdį – skaičių 15).

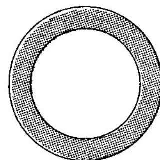
J4. Vienoje šeimoje yra penkios mergaitės: Aušra, Beatričė, Celestina, Danutė ir Elena. Jos yra gimusios nurodyta tvarka kas 3 metai. Vyriausioji Aušra 7 kartus vyresnė už jauniausiąją Eleną. Kiek metų Celestinai?
A 5 **B** 7 **Ⓒ** 8 **D** 9 **E** 15

? Celestinai negali būti 5 metai, nes ji vyresnė už Eleną 6 metais.
Jeigu Celestinai 7 metai, tai Elenai $7-2\cdot 3=1$ metai, o Aušrai $7+2\cdot 3=13$ metų, taigi Aušra vyresnė už Eleną 13 kartų.
Jeigu Celestinai 8 metai, tai Elenai $8-2\cdot 3=2$ metai, o Aušrai $8+2\cdot 3=14$ metų. Tada iš tikrųjų Aušra 7 kartus vyresnė už Eleną.
Vadinasi, tinka atsakymas C.

! Galima užbaigti perranką. Jeigu Celestinai 9 metai, tai Elenai 3 metai, Aušrai 15 metų, ir vyriausioji vyresnė už jauniausiąją 5 kartus.
Jeigu Celestinai 15 metų, tai Elenai 9 metai, o Aušrai 21 metai, ir ji nėra 7 kartus vyresnė už Eleną.
Taigi teisingas tik atsakymas C.

!! Pažymėkime Celestinos amžių x. Tada Elenai $x-6$ metai, o Aušrai $x+6$ metai. Pagal sąlygą $x+6=7(x-6)$. Iš čia $6x=6+7\cdot 6$, $x=8$.

J5. Mažesniojo skritulio skersmuo lygus 5 cm, o didesniojo – 7 cm. Užtušuotos srities plotas lygus:
A 5π **B** 6π **C** 7π **D** 12π **Ⓔ** 24π



! Didžiojo skritulio skersmuo 7 cm, todėl jo plotas 49π. Mažojo skritulio plotas 25π. Todėl užtušuoto žiedo plotas $49\pi-25\pi=24\pi$. Vadinasi, teisingas atsakymas E.

J6. Oskaras skaitmenis žymi tokiais ženklais: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9. Jis suskaičiavo reiškinio

$$\left(\frac{1}{0,16}+\frac{1}{0,125}\right)\cdot 50-2,5$$

reikšmę ir, žiūrėdamas į rezultatą „aukštyn kojomis“, pamatė tokį „žodį“:

Ⓐ OIL **B** BIL **C** hIL **D** ShE **E** ShOE

! Skaičiuokime: $\frac{1}{0.16}+\frac{1}{0.125}=\frac{100}{16}+\frac{1000}{125}=\frac{25}{4}+8=\frac{57}{4}$, todėl rezultatas $\frac{57}{4}\cdot 50-2,5=57\cdot 12,5-2,5=710$. Užrašius „kompiuteriškai“, tai bus 710, o apvertus OIL. Vadinasi, teisingas atsakymas A.

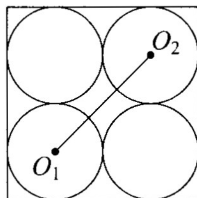
J7. Teigiamųjų realiųjų skaičių poros (x_0, y_0) ir $(3x_0, ty_0)$ tenkina lygtį $3x^3 = 2y^2$. Kam lygus t?
A 3 **B** $\sqrt{3}$ **Ⓒ** $\sqrt{3^3}$ **D** 18 **E** 27

? Tikriname atsakymą A. Teigiamųjų skaičių poros (x_0, y_0) ir $(3x_0, 3y_0)$ tenkina lygtį, t.y. $3x^3 = 2y^2$ ir $81x^3 = 18y^2$ (nulinių indeksų neberašome). Kadangi skaičiai teigiami, galime lygybes dalyti vieną iš kitos, ir gauname $27 = 9$, – prieštara.
Atsakymas B duoda lygybes $3x^3 = 2y^2$ ir $81x^3 = 6y^2$, tada $27 = 3$, – prieštara.
Atsakymas C duoda $3x^3 = 2y^2$ ir $81x^3 = 54y^2$. Tokios lygybės galimos: užtenka imti $x = 2$, $y = 2\sqrt{3}$. Renkamės atsakymą C.

! Iš sąlygos išplaukia, kad teisingos lygybės

$$3x^3 = 2y^2$$
$$3^4x^3 = 2t^2y^2.$$

Padaliję antrą lygybę iš pirmos, gauname $t^2 = 3^3$. Vadinasi, $t = \sqrt{3^3}$, ir teisingas tik atsakymas C.



J8. Kvadrato kraštinės ilgis yra $2a$. Raskite atkarpos O_1O_2, jungiančios skritulių centrus, ilgį.
A $2a\sqrt{2}$ **Ⓑ** $a\sqrt{2}$ **C** $a(\sqrt{2} - 1)$ **D** $2a\sqrt{2} - 1$
E $a(\sqrt{2} - 2)$

! Kadangi skritulio spindulys lygus $a/2$, tai atstumai tarp gretimų skritulių centrų lygūs a, todėl pagal Pitagoro teoremą $O_1O_2 = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

J9. Skaičiaus $1 + 9^{99}$ vienetų skaitmuo yra:
Ⓐ 0 **B** 2 **C** 4 **D** 6 **E** 8

! Nustatykime skaičiaus 9^{99} vienetų skaitmenį. Kadangi $9^2 = 81$ ir vienetų skaitmuo 1, tai ir $9^{98} = 9^2 \cdot 9^2 \cdots 9^2$ vienetų skaitmuo 1. Vadinasi, $9^{99} = 9^{98} \cdot 9$ vienetų skaitmuo yra 9. Todėl $1 + 9^{99}$ vienetų skaitmuo yra 0, ir teisingas atsakymas A.

!! $1 + 9^{99} = 1^{99} + 9^{99}$ dalijasi iš $1 + 9 = 10$, todėl baigiasi nuliu.

J10. Per „Kengūros“ varžybas Marytė kiekvieną 3 taškų uždavinį išsprendžia per 2 minutes, kiekvieną 4 taškų uždavinį – per 3 minutes, o kiekvieną 5 taškų uždavinį – per 5 minutes. Kiek daugiausiai taškų ji gali surinkti per 15 minučių?
A 15 **B** 20 **C** 21 **Ⓓ** 22 **E** 23

? Spręsdama 3-taškius uždavinius Marytė per 1 minutę uždirba $1\frac{1}{2}$ taško, spręsdama 4-taškius – $1\frac{1}{3}$ taško, o spręsdama 5-taškius – 1 tašką. Todėl aišku, kad jai reikia spręsti „daug“ 3-taškių uždavinių. Ji gali spręsti septynis 3-taškius uždavinius, tada per 14 minučių ji surinks $7 \cdot 3 = 21$ tašką. Bet jai lieka 1 minutė, todėl pabandykime atsisakyti vieno 3-taškio uždavinio. Tada jai liks 3 minutės ir ji galės išspręsti dar 4-taškį uždavinį. Taip ji surinks $6 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 22$ taškus.
Renkamės atsakymą D.

! Griežtą sprendimą sugalvoti sunkoka. Žinoma, galima atlikti pilną perranką – variantų čia ne taip jau daug, bet įdomiau jos išvengti.
Visų pirma, Marytei neapsimoka spręsti nei vieno 5-taškio uždavinio: tam jis sugaištų 5 minutes, o per jas ji gali išspręsti 3-taškį ir 4-taškį uždavinius ir surinkti 7 taškus.
Marytei neapsimoka spręsti ir dviejų 4-taškių uždavinių – už juos ji gautų 8 taškus ir išeikvotų 6 minutes, o per 6 minutes jai geriau išspręsti tris 3-taškius uždavinius ir gauti 9 taškus.
Vadinasi, Marytei geriausia rinktis iš dviejų variantų: nespręsti nei vieno 4-taškio uždavinio arba spręsti vieną 4-taškį. Jei ji nesprendžia 4-taškių uždavinių, tai per 15 minučių ji spėja išspręsti septynis 3-taškius uždavinius ir gauna 21 tašką. Jei ji sprendžia vieną 4-taškį uždavinį, jai lieka dar 12 minučių, ji išsprendžia šešis 3-taškius uždavinius ir surenka $1 \cdot 4 + 6 \cdot 3 = 22$ taškus. Vadinasi, teisingas tik atsakymas D.

J11. Funkcija f apibrėžta visų realiųjų skaičių aibėje ir su bet kuriais x, y tenkina lygybę $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$. Kam lygu $f(1999)$?
Ⓐ 0 **B** 1 **C** 2 **D** 1999 **E** Nustatyti neįmanoma

? Labai nesunku atspėti funkciją, kuri tenkina sąlygą, – tai $f(x) \equiv 0$. Todėl $f(1999) = 0$, ir renkamės atsakymą A.

! Imkime $y = 0$. Tada $f(0) = f(x) + f(0)$, todėl $f(x) = 0$ visiems x. Vadinasi, $f(1999) = 0$, ir teisingas tik atsakymas A.

J12. Mano trys mėlynos papūgos sulesa 3 kg grūdų per 3 dienas, mano penkios žalios papūgos sulesa 5 kg grūdų per 5 dienas ir mano 7 oranžinės papūgos sulesa 7 kg grūdų per 7 dienas. Kurių papūgų apetitas didžiausias?
Ⓐ Mėlynų **B** Žalių **C** Oranžinių **D** Visų apetitas vienodas
E Nustatyti neįmanoma

! Per vieną dieną trys mėlynos papūgos sulesa 1 kg grūdų, penkios žalios papūgos sulesa 1 kg grūdų ir 7 oranžinės papūgos sulesa 1 kg grūdų. Todėl didžiausią apetitą turi mėlynosios papūgos, ir teisingas atsakymas A.

!! Per vieną dieną mėlynoji papūga sulesa $\frac{3}{3 \cdot 3} = \frac{1}{3}$ kg grūdų, žalioji – $\frac{5}{5 \cdot 5} = \frac{1}{5}$ kg grūdų, o oranžinė – $\frac{7}{7 \cdot 7} = \frac{1}{7}$ kg grūdų. Taigi rajausios mėlynosios papūgos.

J13. Jeigu sukeisčiau skaitmenis dviženkliame skaičiuje, reiškiančiame mano tėvo amžių, tai gaučiau mano amžių išreiškiantį skaičių. Kuris iš žemiau nurodytų skaičių gali reikšti mano tėvo amžių mano gimimo metu?
A 24 **B** 25 **C** 26 Ⓓ 27 **E** 28

? Mano tėvo amžius turėtų būti apie 30–50 metų. Jeigu tėvui būtų 31 metai, tai man būtų 13, ir skirtumas 18 per mažas. Bandome 41 metus. Tada mano amžius 14, ir skirtumas 27 tarp atsakymų yra. Renkamės atsakymą D.

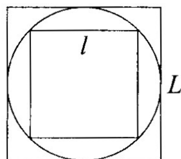
! Sakykime, mano tėvo amžius yra $\overline{xy} = 10x + y$, o mano amžius yra $\overline{yx} = 10y + x$. Mūsų amžiaus skirtumas nekinta ir todėl yra lygus mano tėvo amžiui mano gimimo metu. Tas

skirtumas lygus $10x + y - (10y + x) = 9x - 9y$ ir dalijasi iš 9. Vadinasi, galėtų tikti tik atsakymas D – iš visų nurodytų skaičių tik 27 dalijasi iš 9.
Įsitikinsime, kad jis tikrai tinka. Tada turėtų būti $9x - 9y = 27$, t.y. $x - y = 3$. Imkime $y = 1$, $x = 4$. Tada tėvui 41 metai, o man 14, ir iš tikrųjų mūsų amžiaus skirtumas yra 27 metai. Vadinasi, tinka atsakymas D, ir tik šis atsakymas.

J14. Reiškinys $1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + \cdots - 60$ yra lygus:
(A) -60 **B** -30 **C** 0 **D** 36 **E** 60

? Sugrupuokime dėmenis po 4, tada kiekviena grupė duoda neigiamą skaičių. Vadinasi, atsakymas neigiamas, bet neigiami yra 2 atsakymai. Pirma grupė duoda rezultatą -4, grupių yra 15, taigi renkamės atsakymą A.

! Sugrupavus narius po 4, matome, kad grupės pirmas skaičius mažesnis už trečią skaičių 2 vienetais ir antras už ketvirtą mažesnis 2 vienetais. Vadinasi, kiekviena grupė duoda rezultatą -4, grupių yra 15, todėl rezultatas bus lygus -60.

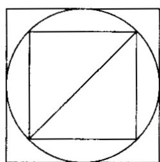


J15. Žr. K27 uždavinio sprendimą.

J16. Dalmuo $\frac{l}{L}$, kur l ir L yra kvadratų kraštinių ilgiai, yra lygus:
A $\frac{1}{2}$ **B** $\frac{1}{4}$ **C** $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **(D)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **E** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

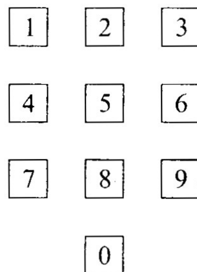
? Iš akies nustatome, kad kraštinių santykis yra didesnis už $\frac{1}{2}$, taigi galėtų tikti atsakymai D ir E. Bet iš skaičių $\sqrt{0{,}5} \approx 0{,}7$ ir $\sqrt{0{,}75} > 0{,}85$ panašesnis pirmasis. Renkamės atsakymą D.

! Išveskime mažojo kvadrato įstrižainę. Ji yra apskritimo skersmuo, todėl lygi L.

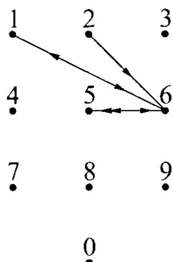


Pagal Pitagoro teoremą $l^2 + l^2 = L^2$, $2l^2 = L^2$, $\sqrt{2}l = L$, $l = \frac{L\sqrt{2}}{2}$, todėl $\frac{l}{L} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Teisingas atsakymas D.

J17. Mano telefono skaitmenys išdėstyti, kaip pavaizduota piešinyje. Atstumas tarp bet kurių dviejų gretimų (ir vertikaliai, ir horizontaliai) kvadratų centrų lygus 2 cm. Koks yra ilgis laužtės, kurią brėžia mano pirštas, kai aš renku numerį 2616565?
A $4\sqrt{2} + 2\sqrt{5} + 4$ **(B)** $4\sqrt{5} + 2\sqrt{2} + 6$
C $4\sqrt{5} + 2\sqrt{2} + 4$ **D** $6\sqrt{2} + 2\sqrt{5} + 4$
E $2\sqrt{2} + 4\sqrt{5} + 8$



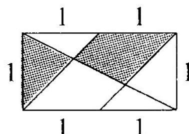
! Mano pirštas vieną kartą brėžia atkarpą 2-6, du kartus atkarpą 1-6 ir tris kartus atkarpą 5-6.



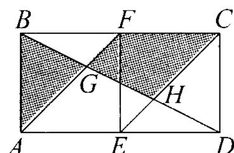
Atkarpos 5-6 ilgis pagal sąlygą lygus 2, pagal Pitagoro teoremą atkarpos 2-6 ilgis lygus $\sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$, atkarpos 1-6 ilgis lygus $\sqrt{4^2+2^2} = 2\sqrt{5}$. Vadinasi, pirštas nueina kelią $2\sqrt{2} + 2 - 2\sqrt{5} + 3 \cdot 2 = 2\sqrt{2} + 4\sqrt{5} + 6$. Taigi teisingas atsakymas B.

J18. Koks yra užtušuotos srities ploto ir viso stačiakampio ploto santykis?

A $\frac{1}{4}$ **B** $\frac{1}{3}$ **C** $\frac{2}{5}$ **(D)** $\frac{5}{12}$ **E** $\frac{1}{2}$



? Iš akies matome, kad užtušuotos dalies plotas sudaro mažiau kaip pusę stačiakampio ploto, bet to mažoka – lieka 4 atsakymai. Panašu, kad tas plotas didesnis už $\frac{1}{3}$ stačiakampio ploto, bet tada lieka dar du labai artimi atsakymai: $\frac{2}{5} = 0{,}4$ ir $\frac{5}{12} \approx 0{,}42$. Bet spėjame, kad įstrižainė dalijama į 3 lygias dalis, taigi atsakymo vardiklyje turėtų būti daugiklis 3. Todėl renkamės $\frac{5}{12}$ – atsakymą D.



! Iš pradžių įrodysime, kad $BG = GH = HD$. Kadangi keturkampio $AFCE$ priešingos kraštinės lygios ir lygiagrečios, tai tas keturkampis – lygiagretainis. Todėl $AF \| EC$. Kadangi $AE = ED$, tai EH yra $\triangle AGD$ vidurinė linija, todėl $GH = HD$. Lygiai taip pat FG yra $\triangle CHB$ vidurinė linija, todėl $BG = GH$.

$\triangle BDA$ ir $\triangle BGA$ pagrindai yra vienoje tiesėje, viršūnė bendra, todėl ir aukštinė bendra. Kadangi $BG = \frac{1}{3}BD$, tai $\triangle ABG$ plotas triskart mažesnis už $\triangle BDA$ plotą ir lygus $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{3}$.

Dabar panašiai apskaičiuosime keturkampio $FGHC$ plotą. Jį gausime iš $\triangle BCD$ ploto, lygaus 1, atėmę $\triangle CHD$ ir $\triangle BGF$ plotus. $S_{\triangle CHD} = \frac{1}{3}S_{\triangle CDB} = \frac{1}{3}$, o $S_{\triangle BGF} = S_{\triangle BFA} - S_{\triangle BGA} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Todėl $D_{FGHC} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

Vadinasi, užtušuotos dalies plotas lygus $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$. Kadangi viso stačiakampio plotas lygus 2, tai ieškomų plotų santykis lygus $\frac{5}{12}$.

!! Dėl simetrijos keturkampiai $AGHE$ ir $CHGF$ lygūs, todėl užtušuoto keturkampio plotas lygus pusei lygiagretainio $AFCE$ ploto, t.y. lygus $\frac{1}{2}$. Todėl užtušuotos dalies plotas lygus $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$ ir sudaro $\frac{5}{12}$ viso stačiakampio ploto.

J19. Mano automobilio laikrodis nerodo sekundžių. Kelionės metu 235 kilometre laikrodis rodė 9^{10}, o 245 kilometre – rodė 9^{17}. Mano automobilio greitis v (km/h) buvo:

A $v \leqslant 75$ **Ⓑ** $75 \leqslant v \leqslant 100$ **C** $v = 75$ **D** $v = 100$ **E** $v \geqslant 100$

? Praėjo maždaug 7 minutės, nuvažiuota (apie) 10 km, tai greitis būtų apie $10 : \frac{7}{60} = 600 : 7 = 85{,}7$ km/h. Renkamės atsakymą B.

! 10 kilometrų buvo nuvažiuota per laiką, didesnį kaip 6 minutės (pavyzdžiui, jeigu laikas buvo 9:10:59 ir 9:17:00) ir mažesnį už 8 minutes (pavyzdžiui, jeigu laikas buvo 9:10:00 ir 9:17:59). Todėl greitis buvo mažesnis už $10 : \frac{8}{60} = 75$ ir didesnis už $10 : \frac{6}{60} = 100$. Taigi teisingas atsakymas B.

J20. Natūralusis skaičius a yra toks, kad $a = \sqrt[3]{***9}$. Kam lygus a?

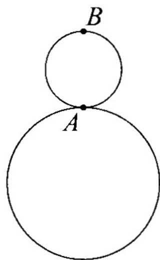
A 29 **B** 23 **Ⓒ** 19 **D** 13 **E** Kitoks skaičius

? Tikriname atsakymą A. Tada $29^3 = ***9$. Paskutinis skaitmuo geras, bet jau 25^3 duoda penkiaženklį skaičių: $25^3 = 25^2 \cdot 25 = 625 \cdot 25 > 600 \cdot 20 = 12000$. Skaičius 23^3, kaip ir 3^3, baigiasi skaitmeniu 7. Skaičius 19^3 didesnis už $10^3 = 1000$ ir mažesnis už $20^3 = 8000$, taigi keturženklis, ir baigiasi, kaip ir 9^3, skaitmeniu 9. Taigi renkamės atsakymą C.

! Turime $a^3 = ***9$. Kadangi $0^3 = 0$, $1^3 = 1$, $2^3 = 8$, $3^3 = 27$, $4^3 = 64$, $5^3 = 125$, $6^3 = \ldots 6$, $8^3 = \ldots 2$, $9^3 = \ldots 9$, tai skaičius a gali baigtis tik 9. Kadangi a^3 keturženklis skaičius, tai $a^3 > 1000$, ir $a > 10$. Kita vertus, kadangi 25^3 yra penkiaženklis skaičius, tai $a < 25$. Intervale $10 < a < 25$ yra tik vienas skaičius, kuris baigiasi 9, – tai 19. Vadinasi, teisingas tik atsakymas C.

J21. Spindulio r moneta neslysdama rieda aplink didesnę monetą, ir grįžus jai į pradinę padėtį taškas B atsidūrė padėtyje A (žr. piešinį). Mažiausias įmanomas didesnės monetos spindulys lygus:

A $\frac{5}{4}r$ **Ⓑ** $\frac{3}{2}r$ **C** $2r$ **D** $\frac{5}{2}r$ **E** $4r$



? Mažesnioji moneta turi apsisukti $n + \frac{1}{2}$ karto. Spėjame, kad geriausiai imti $n = 1$, mažoji moneta apsisuks $\frac{3}{2}$ karto, todėl panašu, kad didžiosios monetos spindulys turėtų būti didesnis $\frac{3}{2}$ karto. Renkamės atsakymą B.

! Jeigu mažesnioji moneta dar sykį apriedėtų didesnę, tai taškas B užimtų padėtį A. Jei didesnės monetos spindulys R, tai jos apskritimo ilgis lygus $2\pi R$. Mažosios monetos apskritimo ilgis lygus $2\pi r$. Sakykime, kad kol moneta dukart apriedės apie didįjį apskritimą

ir padarys kelią $4\pi R$, ji apsisuks n kartų. Tada $4\pi R = n2\pi r$, ir $R = \frac{nr}{2}$. Kadangi $R > r$, o n sveikas, tai mažiausias įmanomas R spindulys yra $\frac{3r}{2}$, ir teisingas atsakymas B.

J22. Matematinis automatas veikia pagal tokią taisyklę: prie duotojo skaičiaus prideda 1 arba skaičių padvigubina. Atlikęs kiekvieną operaciją, jis vėl veikia pagal tą pačią taisyklę. Į automatą įvestas skaičius 0. Automatas po tam tikro operacijų skaičiaus gavo skaičių 100. Koks yra mažiausias operacijų skaičius, kurias turėjo atlikti automatas, kad gautų tokį rezultatą?
A 8 **(B)** 9 **C** 10 **D** 28 **E** 43

? Pirmu ėjimu automatas turi pridėti vienetą. Antru ėjimu jis gauna 2. Tada iš 2 jis turi gauti 100. Apsukime uždavinį ir pradėkime nuo 100 – tada automatas gali skaičių (jei šis lyginis) dalyti iš 2 arba atimti 1. Natūralu galvoti, kad geriausias „kritimo“ greitis bus, kai dalysime pusiau, kol tai galima. Vadinasi, darome taip:

$$100 \to 50 \to 25 \to 24 \to 12 \to 6 \to 3 \to 2.$$

Taigi automatui iš viso reikia 9 operacijų.
Renkamės atsakymą B.

! Mums reikia įrodyti, kad greičiau kaip per 7 operacijas (jeigu skaičius lyginis, galima dalyti pusiau arba atimti 1, o jeigu nelyginis – tik atimti 1) iš 100 negalima gauti 2.

Jeigu pirmas ėjimas $100 \to 99$, tai antras priverstinis: $99 \to 98$. Bet kuri operacija skaičių sumažina ne daugiau negu dvigubai, todėl po 3-io ėjimo gausime $\geqslant 49$, po 4-to – $\geqslant 25$, po 5-to – $\geqslant 13$, po 6-to – $\geqslant 7$, po 7-to – $\geqslant 4$, ir skaičiaus 2 nepasiekiame.
Jeigu pirmas ėjimas $100 \to 50$, tai 2-as negali būti $50 \to 49$: tada 3-as ėjimas priverstinis $49 \to 48$, ir vėl nebesuspėjame: po 4-to ėjimo turėsime $\geqslant 24$, po 5-to – $\geqslant 12$, po 6-to – $\geqslant 6$, po 7-to – $\geqslant 3$. Vadinasi, pirmi du ėjimai $100 \to 50 \to 25$, o trečias priverstinis: $25 \to 24$. Jeigu 4-tą darytume $24 \to 23$, tai nebespėjame: 5-tas $23 \to 22$, 6-tas duoda $\geqslant 11$, 7-tas $-\geqslant 6$. Taigi aiškus ir 4-tas ėjimas $24 \to 12$. Jei 5-tą darytume $12 \to 11$, tai vėl nebespėjame: 6-tas $11 \to 10$, 7-tas – $\geqslant 5$. Vadinasi, 5-tas ėjimas $12 \to 6$. Jei 6-tą darytume $6 \to 5$, tai vėl nebespėjame, vadinasi, 6-tas ėjimas $6 \to 3$, ir 7-tu ėjimu gauname 2.
Taigi įrodėme net šiek tiek daugiau – ne tik kad greičiau kaip 9 ėjimais nuo 0 pasiekti 100 negalima; įrodėme ir tai, kad operacijų seka tam atlikti yra vienintelė:

$$0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 6 \to 12 \to 24 \to 25 \to 50 \to 100.$$

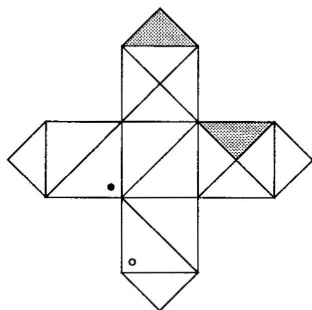
J23. Kiek sveikųjų sprendinių turi lygtis $2^x(6-x) = 8x$?
A 0 **B** 1 **C** 2 **(D)** 3 **E** 4

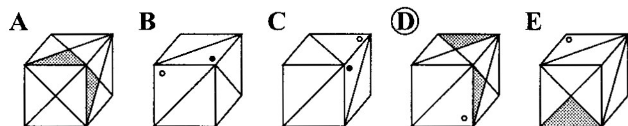
? Tikriname: 0 netinka, 1 netinka, 2 tinka, 3 tinka, 4 tinka, 5 netinka, 6 netinka. Didesni už 6 skaičiai netinka, neigiami skaičiai netinka. Radome 3 sprendinius. Renkamės atsakymą D.

! Su $x \leqslant 0$ kairė pusė teigiama, dešinė neteigiama, o su $x > 6$ – kairė neteigiama, dešinė teigiama. Todėl sveikaisiais sprendiniais gali būti tik skaičiai 1, 2, 3, 4, 5. Patikrinę įsitikiname, kad 1 ir 5 netinka, o 2, 3 ir 4 tinka. Vadinasi, yra 3 sveikieji sprendiniai, ir teisingas atsakymas D.

J24. Žr. K28 uždavinio sprendimą.

J25. Iš kartono, turinčio šalia esančiame piešinyje pavaizduotos figūros formą, suklijuotas kubas. Kurio iš žemiau pavaizduotų kubų negalėtume taip gauti?





? Pastebime, kad palikus centrinį kvadratą (su įstrižaine) horizontalų, o visus kraštus nulenkus žemyn, užtušuotieji trikampiai turės bendrą tašką, taigi jie turės bendrą tašką ir baigus lankstyti. Taip nėra kube D. Renkamės atsakymą D.

! Išsikirpus išklotinę, kubus lankstyti ir sukioti paprasta. Žymiai sunkiau tai daryti be iškarpos. Mūsų tikslas – įsitikinti, kad visus kitus keturis kubus išlankstyti galima.
Išlankstykime kubą A. Sieną su dviem įstrižainėmis darykime priekine (vertikalia) ir lenkime kartoną taip, kad apatinė dalis (4 kvadratai ir 3 ketvirtadaliai) būtų horizontalioje plokštumoje. Tada kvadrato su užtušuotu trikampiu užtušuotoji kraštinė atsidurs priekyje, ir kai jį užlenksime į vertikalią padėtį, tas kvadratas taps dešiniąja siena, o užtušuotas trikampis užims paveiksle A pavaizduotą padėtį. Visiškai aišku, kad viršutinės sienos užtušuotas trikampis taip pat užims reikiamą padėtį.
Išlankstykime kubą B. Pasukime lapą 90° kampu pagal laikrodžio rodyklę ir darykime sieną su baltu tašku priekine. Tada lenkiant siena su įstrižaine bus dešinioji, ir įstrižainė eis kaip parodyta piešinyje B. Dar kartą lenkiant siena su juoduoju tašku taps viršutine, ir taškas bus arti priekinės sienos, kaip ir reikia.
Išlankstykime kubą C. Pasukime išklotinę 180° kampu ir darykime sieną su įstrižaine priekine. Tada užlenkus kvadratas su juodu tašku taps dešiniąja siena, o taškas užims padėtį, pavaizduotą paveiksle C. Užlenkus kvadratą su baltu tašku, jis taps viršutine siena, įstrižainė eis iš kairės į dešinę, o taškas bus „toli“, prie užpakalinės sienos, kaip ir turi būti.
Lankstykime kubą E. Pasukime brėžinį 180° (t.y. apverskime jį) ir darykime sieną su užtušuotu trikampiu priekine. Tada užlenkus kvadratą su įstrižaine, jis bus dešinioji siena ir įstrižainė eis nuo priekinės sienos apačioje link užpakalinės sienos viršuje. Dabar užlenkus kvadratą su baltu tašku jis taps viršutine siena, o įstrižainė kaip tik eis nuo užpakalinės sienos dešinėje prie priekinės sienos kairėje, ir baltasis taškas bus prie užpakalinės sienos, kaip ir turi būti.
Pasižiūrėkime, kas gi atsitiks, jei bandysime sulankstyti kubą D. Pasukime išklotinę 90° kampu prieš laikrodžio rodyklę ir padarykime sieną su baltu tašku priekine. Tada po dviejų lenkimų kvadratas su užtušuotu trikampiu taps viršutine siena, ir trikampis užims reikiamą padėtį. O štai kitas užtušuotas trikampis po dviejų lenkimų atsidurs dešinėje sienoje, bet jo ilgoji kraštinė bus ne priekinėje sienoje (kaip turėtų būti), o užpakalinėje.
Taigi iš visų kubų negalima išlankstyti tik kubo D, ir teisingas tik atsakymas D.

J26. Prie įėjimo į tvirtovę sukrauta vienodų patrankos sviedinių piramidė. Jos pagrindas yra lygiakraštis trikampis. Kiek sviedinių gali būti piramidėje?
A 200 **B** 210 **(C)** 220 **D** 250 **E** 256

! Pagrinde gali būti $2+1=3$ sviediniai, $3+2+1=6$ sviediniai, $4+3+2+1=\frac{4\cdot5}{2}=10$ sviedinių, $5+4+3+2+1=\frac{5\cdot6}{2}=15$ sviedinių, ..., $n+(n-1)+(n-2)+\cdots+3+2+1=\frac{n(n+1)}{2}$ sviedinių. Atitinkamai piramidėje bus $3+1$, $6+3+1$, $10+6+3+1$, ..., $\frac{n(n+1)}{2}+\frac{(n-1)n}{2}+\cdots+\frac{3\cdot4}{2}+\frac{2\cdot3}{2}+\frac{1\cdot2}{2}$ sviedinių. Pastaroji suma lygi $\frac{1}{2}(n^2+n+(n-1)^2+(n-1)+(n-2)^2+(n-2)+\cdots+3^3+3+2^2+2+1^2+1)=\frac{1}{2}[n^2+(n-1)^2+\cdots+2^2+1^2+n+(n-1)+\cdots+2+1]=\frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right]=\frac{1}{12}n(n+1)[2n+1+3]=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$.
Vadinasi, jeigu vieno sviedinio nelaikysime piramide, tai piramidėje gali būti 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, 220, 286, ... sviediniai.
Matome, kad iš pateiktų 5 atsakymų tinka tik vienas – būtent C.

Pastaba. Čia susiduriame su ypač retu atveju, beveik nepasitaikančiu tarp konkurso uždavinių: kaip taisyklė, išsprendus uždavinį, gaunamas vienintelis atsakymas, ir jis yra tarp penkių pateiktų atsakymų A, B, C, D ir E. O šiame uždavinyje atsakymų yra „be galo daug“. Tiesa, iš pateiktų atsakymų įmanomas tik vienas. Uždavinys neturėtų šio trūkumo, jeigu sąlygos pirmas sakinys būtų, pavyzdžiui toks: „Prie įėjimo į tvirtovę sukrauta vienodų patrankos sviedinių piramidė, kurioje yra ne mažiau kaip 200 ir ne daugiau kaip 300 sviedinių.“

J27. Kiek daugiausiai poaibių, turinčių ne daugiau kaip 3 elementus, galima sudaryti iš septynelementės aibės taip, kad bet kurie du poaibiai turėtų lygiai vieną bendrą elementą?
A 3 **B** 5 **(C)** 7 **D** 9 **E** 11

? Pažymėkime septynelementės aibės elementus 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Pagal sąlygą reikia nagrinėti vienelemenčius, dvielemenčius ir trielemenčius poaibius.
Pabandykime imti kurį nors vienelementį poaibį, pavyzdžiui, 1. Daugiau vienelemenčių poaibių paimti negalima – jie neturės bendro elemento su 1. Galima imti dvielemenčius poaibius – vienas kiekvieno jų elementas būtinai turi būti 1 – kitaip jis neturės bendrų elementų su poaibiu 1. Tai poaibiai 12, 13, 14, 15, 16, 17. Turime 7 poaibius. Trielemenčio poaibio prijungti nebepavyksta – trielemenčio poaibio vienas elementas turi būti 1 (kitaip poaibis nebeturės bendro elemento su 1), o tada nebėra ką imti – kad ir kokį imtume antrą elementą, trielementis poaibis turės du elementus, bendrus su vienu iš dvielemenčių poaibių.
Pabandykime neimti vienelemenčio poaibio ir imti tik dvielemenčius poaibius 12, 13, 14, 15, 16, 17. Tada prie jų nebepavyksta prijungti nei dvielemenčio poaibio, nei trielemenčio poaibio.
Pagaliau pabandykime pradėti nuo trielemenčių poaibių – imkime, pavyzdžiui, poaibius 123, 145, 167. Prie jų pavyksta prijungti dar poaibius 246, 257, 347, 356. Vėl turime 7 poaibius.
Renkamės atsakymą C.

! Iš pradžių įrodysime, kad jeigu turime ne mažiau kaip 7 poaibių rinkinį, tenkinantį uždavinio sąlygą, tai tas rinkinys turi lygiai 7 poaibius ir iš esmės sutampa su vienu jau

minėtų (t.y. 7-elementės aibės elementus galima sunumeruoti taip, kad gautume būtent tokį rinkinį).
a) Sakykime, kad rinkinyje yra 1-elementis poaibis (trumpiau – 1-poaibis). Tada daugiau 1-poaibių nėra, nes du 1-poaibiai bendrų elementų neturi. Pavadinkime tą elementą 1. Visi kiti rinkinio poaibiai turi elementą 1 ir neturi kitų bendrų elementų. Sunumeruokime kitus elementus skaičiais 2, 3, 4, 5, 6, 7. Vadinasi, reikia nustatyti, kiek daugiausiai galima sudaryti iš tų skaičių 2-elemenčių ir 3-elemenčių poaibių, kurie turėtų tik bendrą elementą 1. Bet jeigu rinkinyje būtų 3-elementis poaibis, sakysime, 123, tai jį geriau keisti dviem 1-elemenčiais poaibiais 12 ir 13, – tada poaibių skaičius tik padidės. Vadinasi, daugiausiai gali būti šeši 2-poaibiai: 12, 13, 14, 15, 16, 17. Gauname pažįstamą rinkinį 1, 12, 13, 14, 15, 16, 17.
b) Toliau visur laikysime, kad 1-poaibių rinkinyje nėra. Įrodysime, kad rinkinyje yra ne daugiau kaip trys 2-poaibiai. Tarkime priešingai, kad yra ne mažiau kaip keturi 2-poaibiai. Imkime du iš jų ir bendrą jų elementą pažymėkime 1, o skirtingus – skaičiais 2 ir 3. Taigi turime 2-poaibius 12 ir 13. Įsitikinkime, kad likusieji 2-poaibiai turi elementą 1. Iš tikrųjų, jeigu yra poaibis, kuris neturi 1, tai jis turi tiek elementą 2, tiek elementą 3, t.y. jis yra poaibis 23. Bet tada daugiau 2-poaibių nebebūtų: toks poaibis negali turėti dviejų elementų iš 1, 2, 3, o jei turi tik vieną iš jų, tai neturi bendro elemento su vienu iš poaibių 12, 13, 23.
Taigi likusieji 2-poaibiai gali būti tik kurie nors iš poaibių 14, 15, 16, 17. Bet tada yra ne daugiau kaip šeši 2-poaibiai. Taigi įrodėme, kad rinkinyje yra bent vienas 3-poaibis.
Galime laikyti, kad rinkinyje yra poaibiai 12, 13, 14, 15. Jei rinkinyje būtų 3-poaibis, kuris neturi 1, tai jis turėtų tiek 2, tiek 3, tiek 4, tiek 5, o tada jis nebūtų 3-elementis. Jei rinkinyje yra 3-poaibis, kuris turi 1, tai jis kitus 2 elementus turi iš aibės {6, 7}, t.y. jis yra 167. Turime rinkinį 12, 13, 14, 15, 167, kuriame tik 5 elementai. Prieštara.
c) Įrodėme, kad rinkinyje yra ne mažiau kaip keturi 3-poaibiai. Sakykime, kad bent trys 3-poaibiai turi bendrą elementą. Pažymėkime juos 123, 145, 167. Tada 2-poaibių nebėra: jei 2-poaibis turėtų elementą 1, tai nė viena iš kombinacijų 12, 13, 14, 15, 16, 17 netinka; jei jis neturi vieneto, tai jis turėtų turėti bent 3 elementus – po vieną iš {2, 3}, iš {4, 5} ir iš {6, 7}. Vadinasi, visi poaibiai 3-elemenčiai. Joks iš tų poaibių negali turėti 1 – tada jis turėtų 2 bendrus elementus su vienu iš poaibių 123, 145, 167. Toks 3-poaibis turi turėti vieną elementą iš {2, 3}, vieną iš {4, 5} ir vieną iš {6, 7}. Reikalui esant pernumeravę elementus, galime laikyti, kad tai poaibis 246.
Taigi turime poaibius 123, 145, 167, 246. Likusieji 3-poaibiai, kaip jau matėme, negali turėti 1. Tarkime, kad kuris nors iš jų turi elementą 2. Tada jis neturi 1, 3, 4, 6, todėl turi tik 5 ir 7, t.y. tai poaibis 257. Turime jau penkis 3-poaibius 123, 145, 167, 246, 257. Likusieji poaibiai neturi 1, 2, taigi turi 3, 4 arba 5, 6 arba 7, 4 arba 6, 5 arba 7. Tokių poaibių yra tik 2: 347 ir 356. Gauname jau pažįstamą rinkinį.
Liko išnagrinėti atvejį, kai turime poaibius 123, 145, 167, 246, bet nei vienas kitas 3-poaibis elemento 2 neturi. Tada bet kuris iš jų turi turėti 3, 4 arba 5, 6 arba 7, 4 arba 6. Tai tik poaibiai 347, 356, ir iš viso turėtume tik šešis 3-poaibius.
Taigi iš viso radome tik du jau minėtus poaibių rinkinius, kurie turi 7 poaibius, ir teisingas tik atsakymas C.

!! Tarkime priešingai, – kad mums pavyko sudaryti 8 ar daugiau tokių poaibių rinkinį. Atmeskime, jei reikia, vieną ar kelis poaibius, kad jų liktų lygiai 8. Bet kurie du poaibiai turi lygiai vieną bendrą elementą. Imkime visas poaibių poras (jų yra $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$) ir skaičiuokime jų bendrus elementus (taip pat ir pasikartojančius). Kadangi taip suskaičiuosime 28 elementus, o jų iš viso yra 7, tai tikrai atsiras bent vienas elementas, kuris įeis bent į 4 rinkinio poras. Jis įeina bent į 4 poaibius (jei jis įeitų tik į 3 poaibius, tai įeitų tik į 3 poras).

Pažymėkime tą elementą skaitmeniu 1 ir nagrinėkime 4 poaibius, kurie turi tą elementą. Galimi du atvejai: a) ir b).

a) Jeigu poaibių ketveriukėje yra vienelementis poaibis $\{1\}$, tai visi 8 poaibiai turės elementą 1 ir neturės kitų bendrų elementų. Atmeskime poaibį $\{1\}$, tada visi kiti 7 poaibiai bus 2-elemenčiai ar 3-elemenčiai. Išmetus iš jų elementą 1, gausime 7 1-elemenčius ir 2-elemenčius poaibius, kurie neturi bendrų elementų ir neturi 1. Bet iš 6 elementų galima sudaryti daugiausiai 6 nesikertančius poaibius, – prieštara.

b) Jeigu poaibių ketveriukėje poaibio $\{1\}$ nėra, tai visi 4 poaibiai yra pavidalo $\{1A\}$, $\{1B\}$, $\{1C\}$, $\{1D\}$, kur poaibiai A, B, C, D yra 1-elemenčiai arba 2-elemenčiai ir nesikerta. Bet tada visi 8 poaibių rinkinio poaibiai turės elementą 1: iš tikrųjų, jei atsirastų poaibis, kuris neturi elemento 1, tai jis turėtų turėti bent po 1 elementą iš A, B, C, D, taigi būtų bent jau 4-elementis, – prieštara. Bet turinčių elementą 1 2-elemenčių ir 3-elemenčių poaibių, kaip jau matėme, gali būti ne daugiau kaip 6, – vėl prieštara. Taigi 8 poaibių rinkinio sudaryti neįmanoma.

Įdomu suvokti, kodėl taip samprotaudami su 7 rinkiniais prieštaros negautume. Tada turėtume $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ porą, ir įmanoma, kad kiekvienas elementas įeis į 3 poaibius, kaip ir rodo vienas iš pavyzdžių. Jeigu kuris nors iš elementų įeis į 4 poaibius, tai a) atveju gautume 7 poaibius, kaip rodo kitas pavyzdys.

J28. Funkcija f apibrėžta visų natūraliųjų skaičių aibėje taip:

$$f(n) = \begin{cases} n+5, & \text{jei } n \text{ nelyginis,} \\ \dfrac{n}{2}, & \text{jei } n \text{ lyginis.} \end{cases}$$

Kam lygi skaitmenų suma nelyginio skaičiaus k, su kuriuo $f(f(f(k))) = 35$?

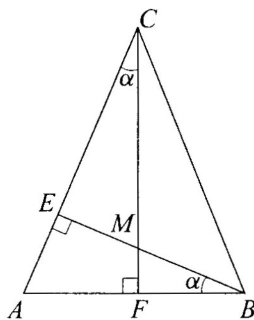
A 8 **Ⓑ** 9 **C** 10 **D** 12 **E** 15

! $f(f(f(k)))$ gautas iš $f(f(k))$ arba pridėjus 5, jei $f(f(k))$ buvo nelyginis, arba padalijus iš 2, jei $f(f(k))$ buvo lyginis. Bet jau pridėjus 5 gavome 35, tai $f(f(k))$ buvo 30, o ne nelyginis skaičius, – prieštara. Vadinasi, $f(f(k)) = 70$. Vadinasi, arba $f(k)$ buvo nelyginis ir lygus 65, arba $f(k)$ buvo lygus 140. Jei $f(k) = 65$, tai arba $k = 60$ ir buvo nelyginis (o taip nėra), arba $k = 130$ (o mums reikia nelyginio k). Todėl $f(k) = 140$. Tai reiškia, kad galėjo būti $k = 135$ arba $k = 280$ (bet šis nėra nelyginis). Vadinasi, kalbamasis k lygus 135, o jo skaitmenų suma lygi 9, ir teisingas atsakymas B.

J29. Smailiojo trikampio ABC aukštinių susikirtimo tašką pažymėkime M. Jeigu $AB = CM$, tai trikampio ABC kampas C lygus:

A 15° **B** 30° **C** 36° **Ⓓ** 45° **E** 60°

? Spėdami galime laikyti, kad $\triangle ABC$ lygiašonis, $AC = BC$, $AF = FB = 1$, $CM = 2$. Pažymėkime $\angle ACF = \alpha$. Tada $AC = \frac{1}{\sin\alpha}$, $AE = 2\sin\alpha$, $EC = 2\cos\alpha$. Kadangi $AC = AE+EC$, tai $\frac{1}{\sin\alpha} = 2\sin\alpha + 2\cos\alpha$, $1 = 2\sin^2\alpha + 2\sin\cos\alpha$, $1 = 1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha$, $\sin 2\alpha = \cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha = 1$, $2\alpha = 45°$. Renkamės atsakymą D.



! Statieji trikampiai EBA ir FCA turi bendrą smailųjį kampą CAB, todėl $\angle EBA = \angle FCA$. Bet tada statieji trikampiai ECM ir EBA lygūs, nes turi lygius smailiuosius kampus ir lygias įžambines. Vadinasi, atitinkami jų statiniai $BE = CE$. Kadangi $\triangle BEC$ status ir lygiašonis, tai $\angle ECB = 45°$. Vadinasi, teisingas tik atsakymas D.

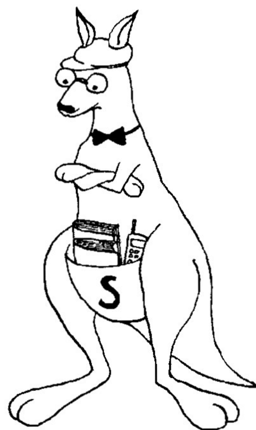
Ir šį kartą sprendimas trumpesnis už spėjimą, bet tokį sprendimą sugalvoti žymiai sunkiau.

J30. Kiek teigiamų daliklių turi skaičius $6n$, jeigu yra žinoma, kad skaičius $2n$ turi 28 teigiamus daliklius, o skaičius $3n$ jų turi 30?
A 32 **B** 34 © 35 **D** 36 **E** 38

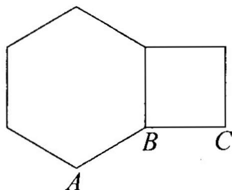
? Skaičius $2n$ turi daliklį 3: priešingu atveju padauginus iš 3 daliklių skaičius padvigubėtų, nes kiekvieną seną daliklį atitiks dar ir naujas, lygus iš 3 padaugintam senajam. Bet tada skaičius $6n$ turėtų 56 daliklius, o tokio atsakymo nėra. Vadinasi, ir skaičius n turi daliklį 3.
Panašiai skaičius $3n$ turi daliklį 2: jei jis daliklio 2 neturėtų, tai skaičius $6n = 2 \cdot 3n$ turėtų dvigubai daugiau daliklių nei skaičius $3n$, t.y. 60, o tokio skaičiaus atsakymuose nėra. Vadinasi, ir skaičius n turi daliklį 2.
Paieškokime skaičiaus n tarp skaičių 2 ir 3 laipsnių sandaugų: $n = 2^x \cdot 3^y$. Po kelių nepavykusių mėginimų randame skaičių $n = 2^5 \cdot 3^3$, kuris tenkina uždavinio sąlygas. Kadangi $6n = 2^6 \cdot 3^4$ turi $7 \cdot 5$ daliklius, tai renkamės atsakymą C.

! Užrašykime skaičių n taip: $2^x \cdot 3^y \cdot m$, kur m nebeturi daliklių nei 2, nei 3, bet turi z kitų daliklių. Tada n turi $(x+1)(y+1)z$ daliklių, $2n$ turi $(x+2)(y+1)z = 28$ daliklius, $3n$ turi $(x+1)(y+2)z = 30$ daliklių. Atėmę pastarąsias lygtis vieną iš kitos, gauname $z(x \cdot y) = 2$. Jeigu $z = 2$, tai $x - y = 1$, $(x+2)(y+1) = 14$, $y+2)(y+1) = 14$, bet dviejų iš eilės einančių skaičių sandauga negali būti 14.
Vadinasi, $z = 1$, $x - y = 2$, todėl $(x+1)(y+2) = 30$, $(y+3)(y+2) = 5 \cdot 6$, $y = 3$, $x = 5$. Taigi gauname vienintelį skaičių $n = 2^5 \cdot 3^3$.
Skaičius $n = 2^5 \cdot 3^3$ tikrai tenkina uždavinio sąlygas: $2n = 2^6 \cdot 3^3$, ir jo dalikliai yra $2^s \cdot 3^t$, kur $0 \leqslant s \leqslant 6$, $0 \leqslant t \leqslant 3$. Kadangi s įgyja 7 reikšmes, o t įgyja 4 reikšmes, tai pagal kombinatorikos daugybos taisyklę skaičius $2^6 \cdot 3^3$ turi $7 \cdot 4 = 28$ daliklius. Nagrinėkime $3n = 2^5 \cdot 3^4$. Šis skaičius pagal tą pačią taisyklę turi $6 \cdot 5 = 30$ daliklių.
Skaičius $6n = 2^6 \cdot 3^4$ pagal daugybos taisyklę turi $7 \cdot 5 = 35$ daliklius, taigi teisingas tik atsakymas C.

SENJORAS (XI ir XII klasės)

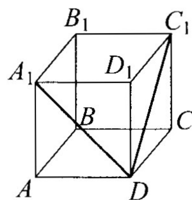


S1. Šalia esančiame piešinyje pavaizduotas kvadratas ir taisyklingasis šešiakampis. Atkarpos AB ir BC yra gretimos tam tikro taisyklingojo daugiakampio kraštinės. Kiek kraštinių turi tas daugiakampis?



A 18 **B** 15 **Ⓒ** 12 **D** 10 **E** 8

! Apskaičiuokime naujojo taisyklingojo n-kampio kampą. Jis lygus $360° - 90° - 120° = 150°$, nes šešiakampio kampas lygus $180°(6-2):6 = 120°$. Bet n-kampio kampų suma lygi $180°(n-2)$, o kampas lygus $180°(n-2):n = 150°$, $6(n-2) = 5n$, $n = 12$. Vadinasi, teisingas atsakymas C.



S2. Kampas tarp kubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ sienų įstrižainių A_1D ir DC_1 lygus:
Ⓐ 60° **B** 80° **C** 45° **D** 90° **E** 75°

? $\angle ADD_1 = 45°$. Įsivaizduokime, kad DD_1 šoninėje sienoje sukame apie tašką D. Kai atkarpa DD_1 užims padėtį DC, tai bus $\angle A_1DC = 90°$ (nes briauna CD statmena priekinei sienai). Galima tikėtis, kad esant vidurinei padėčiai tiesėje DC_1 kampas A_1DC sudarys apie $(90°+45°):2 = 67°30'$. Artimiausi atsakymai du – 60° ir 75°, ir sunku kuriam nors iš jų atiduoti pirmenybę.

! Trikampis A_1DC_1 yra lygiakraštis, nes jį sudaro sienų įstrižainės, kurios visos lygios. Vadinasi, to trikampio kampas lygus 60°, ir teisingas atsakymas A.

S3. Kiek yra tokių natūraliųjų skaičių, mažesnių už 1000, kuriuos galima išreikšti dviejų lyginių skaičių sandauga?
A 100 **B** 150 **C** 200 **D** 220 **Ⓔ** 249

? $2 = 2\cdot 1$, $4 = 2\cdot 2$, $6 = 2\cdot 3$, $8 = 2\cdot 4$, …, $996 = 2\cdot 498$, $998 = 2\cdot 499$. Matome, kad kalbamų skaičių yra tiek, kiek yra skaičių 2, 4, 6, …, 498, arba kiek skaičių 1, 2, 3, …, 249, t.y. 249.
Renkamės atsakymą E.

! Jeigu skaičius yra dviejų lyginių sandauga, tai jis dalijasi iš 4 ir lygus $4n$. Bet tada jį galima išreikšti 2 ir $2n$ sandauga. Vadinasi, reikia suskaičiuoti, kiek skaičių, mažesnių už 1000, dalijasi iš 4. Žinoma, tai $4\cdot 1$, $4\cdot 2$, …, $4\cdot 249$, ir jų yra 249.

S4. Skaičiaus $1999^{1998^{1997^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^1}}}}}}$ vienetų skaitmuo yra:

Ⓐ 1 **B** 3 **C** 7 **D** 9 **E** Kitoks skaitmuo

! Skaičiaus 1999, kaip ir skaičiaus 9, lyginis laipsnis baigiasi vienetu, o nelyginis – devynetu. Bet laipsnio rodiklis yra skaičiaus 1998 laipsnis, taigi yra lyginis, todėl teisingas atsakymas A.

S5. Funkcija f apibrėžta visiems realiesiems skaičiams ir įgyja tik teigiamąsias reikšmes. Ji tenkina tokias sąlygas: $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$ su visais realiaisiais x ir y, $f(1) = 2$. Kam lygu $f(\frac{1}{2})$?

A 0 **B** $\frac{1}{2}$ **C** 1 Ⓓ $\sqrt{2}$ **E** 4

? Funkcija $f(x) = a^x$ tenkina pirmą sąlygą: $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$. Antra sąlyga duoda a : $a^1 = 2$, $a = 2$. Vadinasi, abi sąlygas tenkina funkcija $f(x) = 2^x$. Tada $f(\frac{1}{2}) = 2^{1/2} = \sqrt{2}$. Renkamės atsakymą D.

! Atspėjome vieną funkciją, tenkinančią sąlygą. Iš tikrųjų tokių funkcijų yra be galo daug (žr., pavyzdžiui, autoriaus straipsnį „Susipažinkite: funkcinės lygtys“ žurnale „Alfa ir omega“, 1999 m. 1(7) numeryje). Vis dėlto pasirodo, kad visos jos taške $\frac{1}{2}$ įgyja tą pačią reikšmę. Iš tikrųjų, įstatę $x = y = \frac{1}{2}$ į antrą sąlygą turime, $f(1) = f(\frac{1}{2})\cdot f(\frac{1}{2})$. Bet $f(1) = 2$, todėl $f^2(\frac{1}{2}) = 2$, $f(\frac{1}{2}) = \sqrt{2}$ (funkcija įgyja tik teigiamąsias reikšmes). Taigi teisingas atsakymas D.

S6. Dolerio kursas trijose valiutos keityklose vakar rytą buvo toks pat. Pirmoje keitykloje prieš pietus kursas padidėjo 1%, o po pietų sumažėjo 1%. Antroje keitykloje prieš pietus kursas sumažėjo 1%, o po pietų padidėjo 1%. Trečioje keitykloje dolerio kursas nekito. Kurioje iš keityklų vakarykštei dienai baigiantis dolerio kursas buvo aukščiausias?

A Visose trijose buvo toks pat **B** Pirmoje **C** Antroje Ⓓ Trečioje

E Pirmoje ir antroje

? Sakykime, kad vakar iš ryto dolerio kursas buvo 4 Lt. Vadinasi, pavyzdžiui, už 100 USD visur duodavo 400 Lt. Prieš pietus I keitykloje davė 404 litus, po pietų $404 - 404\cdot 0{,}01 = 404 - 4{,}04 = 399{,}96$ Lt. II keitykloje prieš pietus davė $400 - 4 = 396$ Lt, po pietų – $396 + 396\cdot 0{,}01 = 396 + 3{,}96 = 399{,}96$ Lt. III keitykloje kursas nesikeitė ir davė 400 Lt, t.y. daugiausiai. Renkamės atsakymą D.

! Sakykime, kad vakar rytą dolerio kursas buvo A. I keitykloje prieš pietus jis pakilo iki 101%, taigi tapo $1{,}01A$. Po pietų kursas sumažėjo 1%, taigi pasidarė 99% buvusio, ir tapo $0{,}99\cdot 1{,}01A = 0{,}9999A$. II keitykloje prieš pietus buvo $0{,}99A$, po pietų tapo $1{,}01\cdot 0{,}99A = 0{,}9999A$. III keitykloje kursas visą laiką buvo A, taigi vakare buvo didžiausias. Teisingas atsakymas D.

S7. Kuris iš žemiau nurodytų skaičių lygus $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$?

A $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$ Ⓑ $1+\sqrt{2}$ **C** $1+2\sqrt{2}$ **D** $\sqrt{3}+\sqrt{8}$ **E** $\sqrt{3}+\sqrt{2\sqrt{2}}$

? Pakėlę kvadratu atsakymą, turime gauti $3+2\sqrt{2}$. Atsakymas A duoda $((\sqrt{3}+\sqrt{2})^2)^2 = (5+2\sqrt{6})^2 = 25+24+20\sqrt{6} = 49+20\sqrt{6}$. Atsakymas B duoda $(1+\sqrt{2})^2 = 3+2\sqrt{2}$. Renkamės atsakymą B.

! $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{2}^2+2\sqrt{2}\cdot 1+1^2} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = 1+\sqrt{2}$. Įsitikinsime, kad kiti atsakymai netinka. Atsakyme A turime $5+2\sqrt{6}$, abu dėmenys didesni, taigi ir suma didesnė už $1+\sqrt{2}$. Atsakyme C pirmas dėmuo toks pat, bet antras dėmuo didesnis. Atsakyme D antrieji dėmenys lygūs, bet pirmas dėmuo didesnis. Pagaliau atsakyme E vėl abu dėmenys didesni.

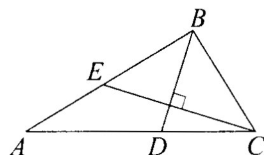
Pastaba. Griežtai kalbant, toks nagrinėjimas būtinas. Palyginkite su uždaviniu: „Kas daugiau: $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ ar $\sqrt{2}-1$?“

S8. Stačiojo trikampio perimetras lygus 18. Visų trijų jo kraštinių ilgių kvadratų suma lygi 128. Kam lygus to trikampio plotas?
A 18 **B** 16 **C** 12 **D** 10 **(E)** 9

? Kadangi statinių kvadratų suma lygi įžambinės kvadratui, tai įžambinės kvadratas lygus 64, įžambinė – 8, statinių suma 10, o jų kvadratų suma 64. Jei statiniai būtų 5 ir 5, tai kvadratų suma 50, o plotas 12,5. Jei statiniai būtų 6 ir 4, tai kvadratų suma 52, plotas 12; jei statiniai 7 ir 3, kvadratų suma 58, plotas 10,5; jei statiniai 7,5 ir 2,5, kvadratų suma $56{,}25+6{,}25 = 62{,}5$, plotas $\frac{7{,}5\cdot 2{,}5}{2} = \frac{75}{8} = \frac{18{,}75}{2} = 9{,}8375$. Spėjame, kad didesniam statiniui šiek tiek padidėjus, plotas dar sumažės. Renkamės atsakymą E.

! Kadangi $c^2 = a^2+b^2$, tai $2c^2 = 128$, $c^2 = 64$, $c = 8$. Taigi $a+b = 10$, $a^2+b^2 = 64$. Vadinasi, $2ab = (a+b)^2-(a^2+b^2) = 100-64 = 36$, todėl trikampio plotas $\frac{ab}{2} = 9$, ir teisingas tik atsakymas E.

S9. Trikampio ABC pusiaukraštinės BD ir CE yra statmenos, $BD = 8$, $CE = 12$. Kam lygus trikampio ABC plotas?
A 24 **B** 32 **C** 48 **(D)** 64 **E** 96



? Keturkampio $EBCD$ plotas lygus $\frac{1}{2}BD\cdot EC = 48$. Trikampio ABC plotas „truputį“ didesnis (bet ne 2 kartus). Renkamės atsakymą D.

! Pusiaukraštinių susikirtimo taškas O dalija pusiaukraštines santykiu $2:1$, todėl $BO = \frac{2}{3}BD = \frac{16}{3}$. BO yra trikampio EBC aukštinė, todėl jo plotas lygus $\frac{1}{2}EC\cdot BO = \frac{1}{2}\cdot 12\cdot\frac{16}{3} = 32$. Bet $\triangle ECA$ ir $\triangle ECB$ plotai lygūs, nes pagrindai lygūs, o aukštinė bendra. Todėl $\triangle ABC$ plotas dvigubai didesnis už $\triangle EBC$ plotą ir lygus 64. Teisingas atsakymas D.

!! Jau matėme, kad keturkampio $EBCD$ plotas lygus 48. Trikampio AED plotas x lygus pusei $\triangle AEC$ ploto, todėl pastarojo plotas $2x$. Trikampio EDC plotas x, trikampio EBC plotas $2x$, vadinasi, keturkampio $EDCB$ plotas $3x = 48$. Todėl $x = 16$, o trikampio ABC plotas $4x$, taigi lygus 64.

S10. Žr. uždavinio J13 sprendimą.

S11. Kiek yra sveikųjų skaičių n, su kuriais reiškinio $\frac{2n^2+9n+13}{n+2}$ reikšmė yra natūralusis skaičius?
A 1 Ⓑ 2 **C** 3 **D** 4 **E** 5

! Kadangi $\frac{2n^2+9n+13}{n+2} = \frac{2n(n+2)+5(n+2)+3}{n+2} = 2n+5+\frac{3}{n+2}$, tai $\frac{3}{n+2}$ turi būti sveikasis skaičius, todėl $n+2$ galėtų būti $\pm 1, \pm 3$, o $n = -5, -3, -1, 1$. Bet kai $n = -5$ ir $n = -3$, tai tiek $2n+5$, tiek $n+2$ neigiami. Vadinasi, tinka n reikšmės -1 ir 1. Todėl teisingas atsakymas B.

S12. Žr. J18 uždavinio sprendimą. (Beje, ten pasirinkimui pateikti kiti atsakymai.)

S13. Sakykime, kad

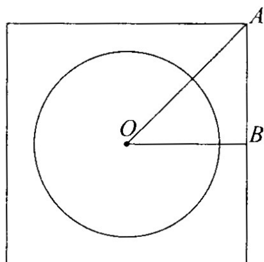
$$a = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{4+\sqrt{5+\sqrt{6}}}}}}.$$

Kuri iš žemiau parašytų nelygybių teisinga?
Ⓐ $1 \leqslant a < 2$ **B** $2 \leqslant a < 3$ **C** $3 \leqslant a < 4$ **D** $4 \leqslant a < 5$ **E** $5 \leqslant a < 6$

? Turime: $\sqrt{6} < 3$, $\sqrt{5+\sqrt{6}} < \sqrt{5+3} < 3$, $\sqrt{4+3} < 3$, $\sqrt{3+3} < 3$, $\sqrt{2+3} < 3$, $a < \sqrt{1+3} = 2$. Renkamės atsakymą A.

! Aišku, kad $a > 1$, todėl turime $1 < a < 2$, ir teisingas tik atsakymas A.

S14. Apskritas 2 m skersmens stalas uždengtas plona kvadratine staltiese, kurios kraštinės ilgis lygus 2,5 m. Staltiesės centras sutampa su stalo centru. Koks yra aukščiausiai nuo grindų esančio staltiesės krašto taško ir žemiausiai esančio staltiesės krašto taško aukščių skirtumas?
A 0,25 m **B** 0,5 m Ⓒ $\frac{5\sqrt{2}-5}{4}$ m **D** $\frac{5\sqrt{2}-2}{2}$ m **E** Nustatyti neįmanoma



! Žemiausiai nusileis staltiesės taškas A, aukščiausiai bus staltiesės taškas B. Jų aukščių skirtumas bus lygus $OA-OB$. Bet $OA = \frac{2.5\sqrt{2}}{2}$, $OB = \frac{2.5}{2}$, todėl $OA-OB = \frac{5\sqrt{2}}{4} - \frac{5}{4} = \frac{5\sqrt{2}-5}{4}$, ir teisingas tik atsakymas C. Beje, atsakymas nepriklauso nuo stalo skersmens (kol jis mažesnis už 2,5 m).

S15. Funkcija f apibrėžta formule

$$f(x) = x^2 + \sqrt{x^4+1} + \frac{1}{x^2 - \sqrt{x^4+1}}.$$

Kam lygu $f(1999^{2000})$?

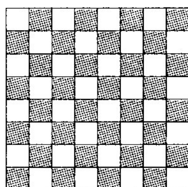
A $-\frac{1}{1999^{1000}}$ **B** $-\frac{1}{1999^{2000}}$ **Ⓒ** 0 **D** $\frac{1}{1999^{2000}}$ **E** $\frac{1}{1999^{1000}}$

! Kadangi $1/(x^2 - \sqrt{x^4+1}) = (x^2 + \sqrt{x^4+1})/((x^2 + \sqrt{x^4+1})(x^2 - \sqrt{x^4+1})) = (x^2 + \sqrt{x^4+1})/(x^4 - x^4 - 1) = -x^2 - \sqrt{x^4+1}$, tai $f(x) = 0$ su kiekvienu x. Vadinasi, $f(1999^{2000}) = 0$, ir teisingas atsakymas C.

S16. Įprastinė 8×8 šachmatų lenta sudaryta iš 64 kvadratinių langelių. Kiek kvadratų, sudarytų iš tų kvadratinių langelių, galima įžiūrėti šachmatų lentoje?

A 64 **B** 65 **C** 113 **D** 114 **Ⓔ** 204

? Jau kvadratėlių 1×1 yra 8×8, kvadratėlių 2×2 yra 7×7, kvadratėlių 3×3 yra 6×6, taigi gali tikti tik atsakymas E. Jį ir renkamės.



! Svarbiausia sugalvoti sau sistemą, kaip skaičiuoti. Ji galėtų būti tokia: skaičiuoti apatines kairiąsias kvadratų viršūnes. Tada
kvadratų 1×1 tokių viršūnių yra 8 eilės po 8 taškus, t.y. 64;
kvadratų 2×2 yra 7 eilės po 7, t.y. 49;
kvadratų 3×3 yra 6 eilės po 6, t.y. 36;
kvadratų 4×4 yra 5 eilės po 5, t.y. 25;
kvadratų 5×5 yra 4 eilės po 4, t.y. 16;
kvadratų 6×6 yra 3 eilės po 3, t.y. 9;
kvadratų 7×7 yra 2 eilės po 2, t.y. 4;
kvadratų 8×8 yra 1 eilė po 1, t.y. 1.
Vadinasi, yra $1^2 + 2^2 + \cdots + 8^2 = \frac{8 \cdot 9 \cdot 17}{6} = 204$ kvadratai, ir teisingas atsakymas E.

S17. Kurį iš žemiau nurodytų skaičių reikėtų įstatyti vietoje n į reiškinį $1999^n - 1998n - 1$, kad gautume skaičių, kuris dalijasi iš $1998 \cdot 1999$?

A 1997 **B** 1998 **C** 1999 **Ⓓ** 2000 **E** 2001

? Matome, kad $1999^n - 1$ dalijasi iš $1991 - 1$, todėl reiškinys dalijasi iš 1998. Pasižiūrėkime, kada jis dalysis iš 1999. Aišku, kad iš 1999 turi dalytis $1998n + 1 = 1999n - (n - 1)$, todėl ir $n - 1$. Tam užtenka paimti 2000, taigi renkamės atsakymą D.

! Iš pradžių būtina įsitikinti, kad 1998 ir 1999 neturi bendrų daliklių (pavyzdžiui, 12 dalijasi iš 6 ir iš 3, bet nesidalija iš 18). Tai galima atlikti įvairiai. Pavyzdžiui, išskaidę $1998 = 2 \cdot 999 = 2 \cdot 9 \cdot 111 = 2 \cdot 3^3 \cdot 37$, įsitikiname, kad 1999 nesidalija nei iš 2, nei iš 3, nei iš 37. Bet dar paprasčiau samprotauti taip. Tarkime, kad 1998 ir 1999 turi bendrą daliklį, didesnį už 1. Tada ir jų skirtumas $1999 - 1998 = 1$ dalytųsi iš jo, – prieštara. Dabar užtenka išsiaiškinti, kurie skaičiai dalijasi tiek iš 1998, tiek iš 1999. Visi skaičiai dalijasi iš 1998. Iš 1999 dalysis tie skaičiai, kai $n-1$ dalijasi iš 1999. Bet pirmi trys atsakymų skaičiai mažesni už 1999, o 2000 nesidalija iš 1999, nes gretimi skaičiai bendrų daliklių neturi. Todėl tinka tik atsakymas $n = 2000$, t.y. atsakymas D.

S18. Dviejų iš trijų daugianario $x^3 + ax^2 + bx + c$ šaknų suma lygi 0. Kam lygus c?
A $a+b$ **B** $\frac{a}{b}$ Ⓒ ab **D** $a-b$ **E** a^b

? Imkime konkretų daugianarį – sakykime, kad jo šaknys $-2, 2$ ir 1. Tai daugianaris $(x+2)(x-2)(x-1) = (x^2-4)(x-1) = x^3-x^2-4x+4$. Tada $a=-1$, $b=-4$, $c=4$. Taigi $c \neq a+b$, $c \neq \frac{a}{b}$, $c \neq a-b$, $c \neq a^b$, taigi renkamės atsakymą $c = ab$, t.y. atsakymą C.

! Kadangi dviejų šaknų suma $x_1 + x_2 = 0$, tai šaknis galime žymėti $x_1, -x_1, x_3$. Daugianario $(x-x_1)(x+x_1)(x-x_3) = (x^2-x_1^2)(x-x_3) = x^3 - x_3x^2 - x_1^2x + x_1^2x_3$ koeficientai $a = -x_3$, $b = -x_1^2$, $c = x_1^2x_3$. Todėl $c = (-b)(-a) = ab$.
Ir vis dėlto: ar tik vienas atsakymas tinka? Ar negali tikti kiti atsakymai? Kitaip sakant: ar negali tikti atsakymas A, t.y. ar negali būti $a+b=ab$?; ar negali tikti atsakymas B, t.y. būti $ab = \frac{a}{b}$?; ar negali tikti atsakymas D, t.y. būti $a-b=ab$?; ar negali tikti atsakymas E, t.y. būti $a^b = ab$?
Deja, pasirodo, kad visi tie atvejai įmanomi. Negana to, jeigu $b=-1$, tai iš karto tinka atsakymai B ir C, o jei dar būtų $a = \frac{1}{2}$, tai tiktų ir atsakymas A. Taip pat dar tiks atsakymas D, kai, pavyzdžiui, $a=2$, $b=\frac{2}{3}$. Dar tiks atsakymas E, kai, pavyzdžiui, $b=1$.
Vadinasi, uždavinys nekorektiškas: pasirinkus atsakymą, visada galima nurodyti daugianarį, kuriam tas atsakymas bus teisingas.
Išsamus atsakymas būtų, pavyzdžiui, toks. Galima visada teigti, kad c bus lygus ab. Vis dėlto kartais (tai priklauso nuo a, b ir c) gali būti teisingas dar kuris nors atsakymas ar net keli iš jų.

S19. Kiek realiųjų šaknų turi lygtis $x^2 - [x] = 3$?
([x] yra didžiausias sveikasis skaičius, ne didesnis už x.)
A 0 Ⓑ 1 **C** 2 **D** 3 **E** 4

? Jeigu $[x]=0$, tai $x^2=3$, $x=\pm\sqrt{3}$, – prieštara. Jeigu $[x]=1$, tai $x^2=4$, $x=\pm 2$, – prieštara. Jeigu $[x]=2$, tai $x^2=5$, $x=\sqrt{5}$. Jei $[x]=3$, tai $x^2=6$, $x=\sqrt{6}$, – prieštara. Jei $[x]=4$, tai $x^2=7$, $x=\sqrt{7}$, – prieštara, ir matome, kad kitų teigiamų reikšmių $[x]$ įgyti negali. Jeigu $[x]=-1$, tai $x^2=2$, $x=-\sqrt{2}$, – prieštara. Jei $[x]=-2$, tai $x^2=1$, $x=-1$, – prieštara. Jei $[x]=-3$, tai $x^2=0$, $x=0$, – prieštara. Matome, kad yra tik viena šaknis, ir renkamės atsakymą B.

! Kadangi $x-1 < [x] \leqslant x$, tai iš lygties $x^2 = [x]+3$ gauname nelygybę $x+2 < x^2 \leqslant x+3$, po to sistemą

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 > 0, \\ x^2 - x - 3 \leqslant 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 2 \text{ arba } x < -1, \\ \frac{1-\sqrt{13}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1+\sqrt{13}}{2}, \end{cases}$$

$$2 < x \leqslant \frac{1+\sqrt{13}}{2} \text{ arba } \frac{1-\sqrt{13}}{2} \leqslant x < -1.$$

Iš čia $[x] = 2$ arba $[x] = -2$.
Kai $[x] = 2$, gauname $x^2 = 5$, $x = \sqrt{5}$. Kai $[x] = -2$, turime $x^2 = 1$, $x = -1$, – prieštara. Vadinasi, yra tik viena šaknis $x = \sqrt{5}$, ir teisingas atsakymas B.

S20. Kiek šaknų turi lygtis $|||x| - 1| - 2| - 3| = 2{,}5$?
A 2 **B** 4 **Ⓒ** 6 **D** 8 **E** 10

! Nuimame vieną modulį:

$$|||x| - 1| - 2| - 3 = \pm 2{,}5,$$

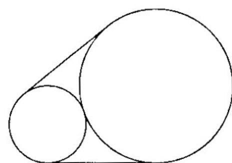
tada 1) $|||x| - 1| - 2| = 5{,}5$ arba 2) 0,5.
1) $||x| - 1| - 2 = \pm 5{,}5$,
$||x| - 1| = 7{,}5$ arba $||x| - 1| = -3{,}5$.
Antra lygtis neturi sprendinių, todėl

$$|x| - 1 = \pm 7{,}5, \; |x| = 1 \pm 7{,}5, \; |x| = 8{,}5, \; x = \pm 8{,}5.$$

2) $||x| - 1| - 2 = \pm 0{,}5$,
$||x| - 1| = 2{,}5$ arba $||x| - 1| = 1{,}5$.
Iš pirmos lygties $|x| - 1 = \pm 2{,}5$, $|x| = 1 \pm 2{,}5$, $|x| = 3{,}5$, $x = \pm 3{,}5$.
Iš antros lygties $|x| - 1 = \pm 1{,}5$, $|x| = 1 \pm 1{,}5$, $|x| = 2{,}5$, $|x| = \pm 2{,}5$.
Gavome sprendinius $\pm 8{,}5$, $\pm 3{,}5$, $\pm 2{,}5$, taigi teisingas atsakymas C.

!! Jei x sprendinys, tai ir $-x$ sprendinys, todėl užtenka nagrinėti $x \geqslant 0$.
Jei $0 \leqslant x \leqslant 1$, tai $||x| - 1| = |x - 1| = 1 - x$, $|1 - x - 2| = |-1 - x| = |1 + x| = x + 1$, $|x + 1 - 3| = |x - 2| = 2 - x$, ir gauname lygtį $2 - x = 2{,}5$, $x = -0{,}5$, taigi sprendinių nagrinėjamame intervale nėra.
Jei $1 \leqslant x \leqslant 3$, tai $||x| - 1| = |x - 1| = x - 1$, $|x - 1 - 2| = |3 - x| = 3 - x$, $|3 - x - 3| = |x| = x$, ir gauname $x = 2{,}5$.
Jei $3 \leqslant x \leqslant 6$, tai $||x| - 1| = x - 1$, $|x - 1 - 2| = |3 - x| = x - 3$, $|x - 3 - 3| = |x - 6| = 6 - x$, ir gauname lygtį $6 - x = 2{,}5$, $x = 3{,}5$.
Jei $x \geqslant 6$, tai $||x| - 1 = x - 1$, $|x - 1 - 2| = |3 - x| = x - 3$, $|x - 3 - 3| = |x - 6| = x - 6$, ir gauname lygtį $x - 6 = 2{,}5$, $x = 8{,}5$. Radome 3 teigiamus sprendinius, o prijungę prie jų neigiamus sprendinius turėsime 6 sprendinius.

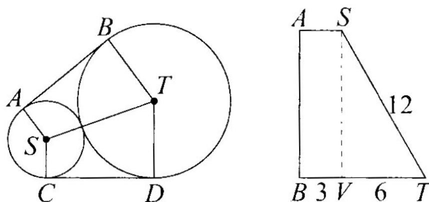
S21. Du apskritimai, kurių skersmenys yra 6 cm ir 18 cm, liečiasi iš išorės. Juos kartu apjuosėme virvute (žr. piešinį). Koks tos virvutės ilgis?



A $10 + 20\pi$ cm (**B**) $12\sqrt{3} + 14\pi$ cm
C $13\sqrt{3} + 12\pi$ cm **D** $14\sqrt{3} + 11\pi$ cm
E Kitoks rezultatas

? Kadangi atstumas tarp centrų yra $3 + 9 = 12$ cm, tai liestinė bus apie 10 cm. Mažasis lankas yra apie $\frac{1}{3}$ apskritimo, t.y. apie $\frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot 3 = 2\pi$ cm, didysis lankas yra apie $\frac{2}{3}$ apskritimo ilgio, t.y. – apie $\frac{2}{3} \cdot 2\pi \cdot 9 = 12\pi$ cm. Iš viso gauname apie $20 + 14\pi$ cm. Renkamės atsakymą B.

! Virvutės ilgis lygus dviejų bendrų liestinių AB ir CD ir lankų AC (mažojo) ir BD (didžiojo) ilgių sumai.



Kadangi spinduliai statmeni liestinei lietimosi taške, tai turime stačiąją trapeciją $BAST$, $AS = 3$ cm, $BT = 9$ cm, $ST = 3 + 9 = 12$. Nuleidę statmenį SV gauname, kad $VT = 9 - 3 = 6$ cm. Iš čia $AB = SV = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3}$ cm. Kadangi statinis VT trikampyje VST lygus pusei įžambinės ST, tai $\angle TSV = 30^\circ$, $\angle BTS = \angle VTS = 60^\circ$, o $\angle AST = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$. Taigi mažasis lankas $\smile AC = 360^\circ - 2\angle AST = 120^\circ$ ir sudaro apskritimo trečdalį, todėl jo ilgis lygus $\frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot 3 = 2\pi$ cm. $\angle BTD = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$, todėl mažasis lankas $\smile BD = \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot 9 = 6\pi$ cm, o didysis dvigubai ilgesnis ir lygus 12π cm.
Vadinasi, virvutės ilgis lygus $2 \cdot 6\sqrt{3} + 2\pi + 12\pi = 12\sqrt{3} + 14\pi$ cm, ir teisingas atsakymas B.

S22. Rašydami iš eilės einančių natūraliųjų skaičių kvadratus, gauname skaitmenų seką

149162536496481 . . . .

Koks skaitmuo yra šimtojoje šios sekos vietoje?

A 1 **B** 3 **C** 5 **D** 7 (**E**) 9

! Trys pirmi kvadratai užima 3 vietas, kvadratai nuo 4^2 iki 9^2 užima po dvi vietas, kvadratai nuo 10^2 iki 31^2 užima po tris vietas, taigi turėsime $3 + 6 \cdot 2 + 22 \cdot 3 = 81$ vietą. Imkime 4 kvadratus nuo 32^2 iki 35^2, jie užims dar 16 vietų. Kadangi $36^2 = 1296$, tai 100-tąją vietą užims skaitmuo 9, taigi teisingas atsakymas E.

S23. Vienoje saloje gyvena tiktai teisuoliai, kurie visada sako tiesą, ir melagiai, kurie visada meluoja. Bendras tos salos gyventojų skaičius yra 1999. Kiekvienas iš jų turi vienintelę aistrą – mėgsta arba dainuoti, arba žaisti futbolą, arba meškerioti. Kiekvienam salos gyventojui buvo užduoti 3 klausimai:

1) Ar mėgstate dainuoti?
2) Ar mėgstate žaisti futbolą?
3) Ar mėgstate meškerioti?

Į pirmą klausimą teigiamai atsakė 1000, į antrą – 700, į trečią – 500 asmenų. Kiek melagių gyvena toje saloje?

A 102 **B** 180 Ⓒ 201 **D** 322 **E** 729

! Pažymėkime melagių skaičių x, tada teisuolių saloje yra $1999 - x$. Uždavus visus 3 klausimus, kiekvienas teisuolis teigiamai atsako 1 kartą (o neigiamai 2 kartus), taigi teisuoliai iš viso duoda $1999 - x$ teigiamų atsakymų. Po 3 klausimų kiekvienas melagis teigiamai atsako 2 kartus (ir neigiamai – vieną, kai klausimas liečia jo pomėgį), taigi jie duoda $2x$ teigiamų atsakymų. Vadinasi, $1999 - x + 2x = 1000 + 7 + 500$, ir gauname $x = 201$. Teisingas tik atsakymas C.

S24. Pradėdami nuo kairiojo viršutinio kampo šalia pavaizduotoje diagramoje, einame nuo raidės prie raidės dešinėn arba žemyn. Keliais būdais taip galime gauti žodį „KANGUR“?

A 8 Ⓑ 32 **C** 64 **D** 128 **E** 256

K A N G U R
A N G U R
N G U R
G U R
U R
R

! Galima eiti visus 5 kartus tik žemyn, arba 4 kartus žemyn ir 1 kartą į dešinę, arba 3 kartus žemyn ir 2 į dešinę, arba 2 kartus žemyn ir 3 į dešinę, arba 1 kartą žemyn ir 4 kartus į dešinę, arba visus 5 kartus eiti į dešinę. Jeigu į dešinę eisime visus 5 kartus, tai yra vienintelis kelias. Jeigu į dešinę eisime 1 kartą, tai yra 5 galimybės – į dešinę galima eiti arba pirmu, arba antru, ..., arba penktu ėjimu. Jeigu į dešinę eisime 2 kartus, tai galima padaryti 1 ir 2 ėjimu (rašome 12), galima 13, 14, 15, 23, 24, 34, 35, 45 ėjimais, taigi yra 10 galimybių. Jeigu į dešinę eisime 3 kartus, tai žemyn eisime 2 kartus, o tam yra 10 galimybių. Jeigu žemyn eisime 1 kartą, turėsime 5 galimybes. Jeigu į dešinę eisime 5 kartus, vėl turėsime 1 galimybę. Taigi iš viso turėsime $1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32$ galimybes, ir teisingas atsakymas B.

!! Galima taikyti žinomą formulę:

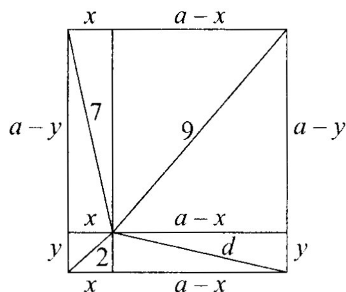
$$C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 2^5 = 32.$$

S25. Taškas P yra kvadrato $ABCD$ viduje, o to taško atstumai iki viršūnių A, B ir C atitinkamai lygūs 2, 7 ir 9. Taško P atstumas iki viršūnės D yra:

A 3 **B** 5 Ⓒ 6 **D** 7 **E** 8

? Galima spėti, kad $2 + 9 = 7 + d$, $d = 4$, bet tokios reikšmės tarp atsakymų nėra. Kadangi lengva pasidaryti stačiųjų trikampių, Pitagoro teorema sufleruoja – o gal lygios kvadratų sumos: $2^2 + 9^2 = 7^2 + d^2$, ir $d = 6$. Renkamės atsakymą C.

! Per tašką išvedame vertikalę ir horizontalę ir eidami „ratu“ taikome Pitagoro teoremą:



$$x^2 + y^2 = 2^2,\ (a-y)^2 + x^2 = 7^2,\ (a-y)^2 + (a-x)^2 = 9^2,\ (a-x)^2 + y^2 = d^2.$$

Antrą ir ketvirtą lygybę apsukame ir visas keturias sudedame:

$$x^2 + y^2 + 7^2 + (a-y)^2 + (a-x)^2 + d^2 = 2^2 + (a-y)^2 + x^2 + 9^2 + (a-x)^2 + y^2,$$

iš čia $7^2 + d^2 = 2^2 + 9^2$ (beje, įrodėme mūsų spėjimo lygybę) ir $d = 6$. Taigi teisingas tik atsakymas C.

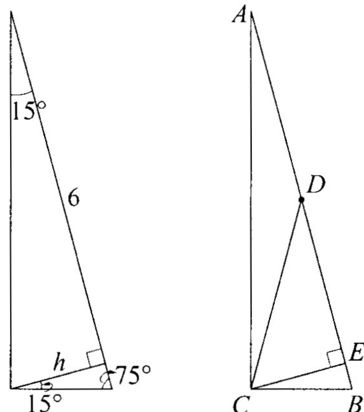
S26. Žr. J27 uždavinio sprendimą (beje, atsakymai šiek tiek pakeisti).

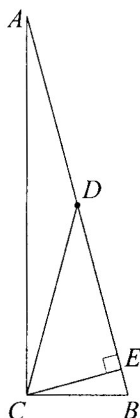
S27. Trikampio kampų didumai sutinka kaip 1 : 5 : 6. Ilgiausios kraštinės ilgis yra 6 cm. Koks yra ilgis aukštinės, nuleistos į ilgiausią kraštinę?

A 1 cm Ⓑ 1,5 cm **C** 2 cm **D** 2,5 cm **E** 3 cm

? Trikampio kampai 15°, 75° ir 90°. Kruopščiai nubraižę matome, kad statmuo apie 4 kartus trumpesnis už įžambinę. Renkamės atsakymą B.

! Mažiausias trikampio kampas lygus $180^\circ : 12 = 15^\circ$, kiti 75° ir 90°. Vadinasi, trikampis statusis. Pagrindas lygus $6 \sin 15^\circ$, todėl $h = 6 \sin 15^\circ \cos 15^\circ = 3 \sin 30^\circ = 1{,}5$ cm, taigi teisingas atsakymas B.





!! Sujunkime stačiojo kampo viršūnę C su įstrižainės viduriu D, tada $CD = AD = DB =$ 3 cm. Trikampis CDB lygiašonis, $\angle DCB = 75^\circ$, todėl $\angle CDE = 30^\circ$. Trikampio CED statinis CE yra prieš 30° kampą, todėl $CE = \frac{1}{2}CD = 1{,}5$ cm.

S28. Žr. J28 uždavinio sprendimą (atsakymai kiek pakeisti).

S29. Mokyklos rankinio turnyre kiekviena komanda sužaidė su kiekviena kita komanda vienerias rungtynes. Už pergalę komanda gaudavo 2 taškus, už pralaimėjimą – 0 taškų, o už lygiąsias abi komandos gaudavo po tašką. Turnyro nugalėtoja per visą turnyrą pelnė 7 taškus, antros vietos laimėtoja – 5 taškus, o trečios vietos laimėtoja – 3 taškus. Kiek taškų pelnė komanda, užėmusi paskutinę vietą?
A 0 **B** 1 **Ⓒ** 2 **D** 3 **E** Nustatyti neįmanoma

? Kadangi pirmos trys komandos surinko 15 taškų, tai jos sužaidė ne mažiau kaip 8 rungtynes. Jeigu komandos 4, tai rungtynių skaičius per mažas: 12, 13, 14, 23, 24, 34 – tik šešerios. Imkime 5 komandas. Tada rungtynių dešimt: 12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35, 45. Jas sužaidusios komandos surenka 20 taškų. Todėl 4-ta ir 5-ta komanda gavo kartu 5 taškus. Bet 4-ta komanda negalėjo gauti mažiau kaip 3 taškus – tada 5-ta komanda turėtų daugiau už ją taškų. Bet ji negalėjo surinkti ir daugiau kaip 3 taškus, nes 3-ia komanda turi tik 3 taškus. Vadinasi, ji surinko 3 taškus, o 5-ta komanda – 2 taškus.
Renkamės atsakymą C.

! Sakykime, kad komandų buvo n. Kadangi yra $\frac{n(n-1)}{2}$ susitikimų, tai visos komandos kartu surenka $n(n-1)$ taškų. Kadangi jau pirmos trys komandos surinko 15 taškų, tai $n(n-1) \geqslant 15$, ir $n \geqslant 5$.
Kita vertus, kiekviena iš komandų nuo 4-tos iki paskutinės (jų yra $n-3$) gavo ne daugiau kaip 3 taškus, taigi kartu surinko ne daugiau kaip $(n-3)3$ taškus. Todėl

$$n(n-1) \leqslant 7 + 5 + 3 + (n-3)3,$$
$$n(n-4) \leqslant 6,$$

ir $n \leqslant 5$. Vadinasi, komandų turnyre buvo 5. Jos visos sužaidė $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ susitikimų ir surinko 20 taškų. Vadinasi, 4-ta ir 5-ta komanda surinko 5 taškus, taigi 4-ta turėjo 3 taškus, o 5-ta 2 taškus.
Dabar reikia įsitikinti, kad toks turnyras galėjo įvykti. Tam sudarysime kokią nors turnyrinę lentelę:

Nr.	1	2	3	4	5	Taškai	Vieta
1		1	2	2	2	7	I
2	1		1	1	2	5	II
3	0	1		0	2	3	III
4	0	1	2		0	3	IV
5	0	0	0	2		2	V

Iš šios lentelės, pavyzdžiui, matome, kad 1-ma komanda sužaidė lygiomis su 2-ra komanda, o likusius susitikimus laimėjo; 4-ta komanda pralaimėjo 5-tai komandai ir pan. 3-ia ir 4-ta

komandos surinko vienodai taškų, ir 3-ia komanda net pralaimėjo 4-tai, bet jai III vieta galėjo atitekti, pavyzdžiui, pagal geresnį įvarčių skirtumą.
Vadinasi, atsakymas 2 taškai tikrai įmanomas, ir teisingas tik atsakymas C.

S30. Seka (a_n), $n \geqslant 1$, apibrėžta pagal taisyklę:

$$a_1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 1998 \cdot 1999 = 1999!,$$
$$a_{n+1} = \text{skaičiaus } a_n \text{ skaitmenų suma, kai } n \geqslant 1.$$

Kam lygus a_{1999}?
A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 6 **(E)** 9

? Imkime mažesnes sekas, imdami $a_1 = 1!, 2!, 3!$ ir t.t. Gausime sekas

$$1, 1, 1, \ldots, \quad 2, 2, 2, \ldots, \quad 6, 6, 6, \ldots, \quad 24, 6, 6, \ldots,$$
$$120, 3, 3, \ldots, \quad 720, 9, 9, \ldots, \quad 5040, 9, 9, \ldots,$$
$$40320, 9, 9 \ldots, \quad 362880, 18, 9, 9 \ldots.$$

Renkamės atsakymą E.

! $a_1 = 1999! < 2000! < 2000^{2000} < 10^{4 \cdot 2000} = 10^{8000}$. Vadinasi, a_1 turi ne daugiau kaip 8000 skaitmenų, o jų suma a_2 ne didesnė kaip $9 \cdot 8000 = 72000$. Tai penkiaženklis skaičius, todėl jo skaitmenų suma a_3 ne didesnė už $9 \cdot 5 = 45$. Tai dviženklis skaičius, todėl skaičiaus a_3 skaitmenų suma a_4 ne didesnė už $9 \cdot 2 = 18$. Kadangi $a_4 \leqslant 18$, tai jo skaitmenų suma a_5 ne didesnė už 9 (bet kurio skaičiaus nuo 1 iki 18 skaitmenų suma tokia). Toliau skaitmenų suma nebesikeičia, t.y. $a_5 = a_6 = \cdots = a_{1999}$. Bet $a_1 = 1999!$ sandaugoje turi 9, todėl dalijasi iš 9, taigi ir jo skaitmenų suma a_2 dalijasi iš 9, ir šio skaitmenų suma a_3 dalijasi iš 9, taigi ir a_5 skaitmenų suma dalijasi iš 9. Vadinasi, ji yra lygi 9, t.y. $a_5 = 9 = a_{1999}$. Taigi teisingas atsakymas E.

KENGŪRA-1999

KONKURSO UŽDUOČIŲ ATSAKYMŲ LENTELĖ

M		B		K		J		S	
1	C	1	B	1	D	1	B	1	C
2	E	2	D	2	D	2	D	2	A
3	B	3	B	3	B	3	C	3	E
4	C	4	D	4	D	4	C	4	A
5	D	5	B	5	D	5	E	5	D
6	E	6	D	6	B	6	A	6	D
7	C	7	D	7	B	7	C	7	B
8	B	8	B	8	B	8	B	8	E
9	E	9	B	9	A	9	A	9	D
10	B	10	A	10	A	10	D	10	D
11	C	11	D	11	C	11	A	11	B
12	A	12	D	12	A	12	A	12	D
13	D	13	B	13	D	13	D	13	A
14	A	14	E	14	C	14	A	14	C
15	D	15	C	15	D	15	C	15	C
16	D	16	A	16	D	16	D	16	E
17	D	17	C	17	B	17	B	17	D
18	C	18	A	18	A	18	D	18	C
19	C	19	D	19	E	19	B	19	B
20	A	20	A	20	B	20	C	20	C
21	A	21	D	21	E	21	B	21	B
22	D	22	C	22	B	22	B	22	E
23	C	23	D	23	D	23	D	23	C
24	A	24	D	24	A	24	B	24	B
		25	E	25	C	25	D	25	C
		26	B	26	D	26	C	26	D
		27	E	27	C	27	C	27	B
		28	B	28	B	28	B	28	D
		29	C	29	B	29	D	29	C
		30	E	30	D	30	C	30	E